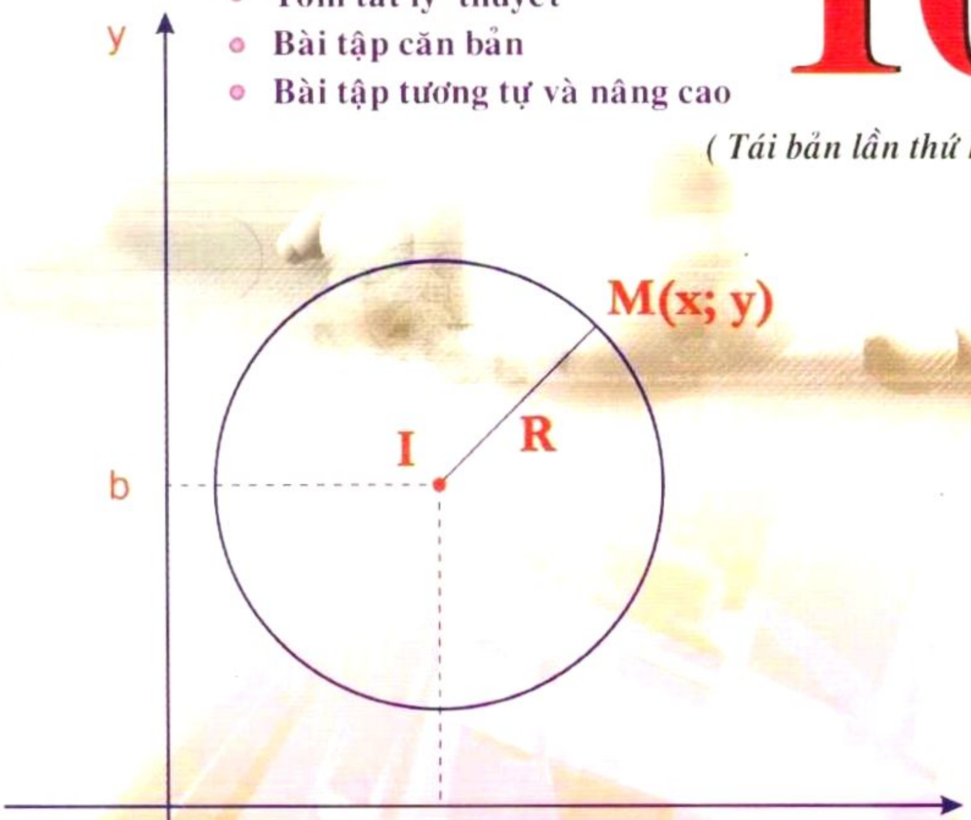
PGS. TS NGUYỄN VĂN LỘC (Chủ biên)
TRẦN QUANG TÀI - MAI XUÂN ĐÔNG - LÊ NGỌC HẢI - TRỊNH MINH LÂM

Hướng dẫn

GIẢI BÀI TẬP
HÌNH HỌC
10

- Tóm tắt lý thuyết
- Bài tập căn bản
- Bài tập tương tự và nâng cao

(Tái bản lần thứ hai)



NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

PGS. TS. NGUYỄN VĂN LỘC (*chủ biên*)
Trần Quang Tài – Mai Xuân Đông
Lê Ngọc Hải – Trịnh Minh Lâm

Hướng dẫn

GIẢI BÀI TẬP
HÌNH HỌC 10

(Tái bản lần thứ hai)

- *Tóm tắt lý thuyết*
- *Bài tập căn bản*
- *Bài tập tương tự và nâng cao*

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn sách "**Hướng dẫn giải bài tập hình học 10**" có nội dung tương ứng với chương trình Hình học 10, biên soạn theo chương trình chuẩn, xuất bản năm 2006.

Mỗi mục (§) của chương trình bao gồm bốn phần:

I. Tóm tắt lý thuyết

II. Bài tập cơ bản

III. Bài tập tương tự và nâng cao

IV. Đáp số và hướng dẫn giải

Phần I: Trình bày những vấn đề lý thuyết trọng tâm nhất của chương trình mà các em cần phải hiểu và nắm vững.

Phần II: Trình bày lời giải chi tiết của các bài tập có trong chương trình, mỗi bài tập đều nêu đầy đủ các bước lập luận với căn cứ là các định nghĩa, định lý, các tính chất đã học.

Phần III: Giới thiệu các bài tập cùng dạng với các bài tập có trong chương trình và các bài tập nâng cao có đánh dấu (*) dành cho học sinh khá, giỏi.

Phần IV: Trình bày đáp số và hướng dẫn giải các bài tập ở phần III.

Việc sử dụng sách nên thực hiện theo trình tự như sau: Sau khi học lý thuyết, các em hãy tự mình giải các bài tập có trong chương trình, nếu gặp khó khăn có thể tham khảo lời giải bài tập trình bày ở phần II, hơn nữa ngay cả khi giải được bài tập của chương trình, các em cũng nên so sánh lời giải của mình với lời giải được trình bày trong sách này để hiểu sâu sắc, đầy đủ kiến thức và phương pháp giải bài toán. Tiếp theo các em nên dành thời gian giải các bài tập ở phần III để rèn luyện kỹ năng giải các dạng toán, nếu gặp khó khăn có thể tham khảo đáp số và hướng dẫn giải ở phần IV.

Hy vọng với cách biên soạn này, cuốn sách sẽ là tài liệu hỗ trợ tích cực giúp các em học tốt Hình học 10.

Rất mong các em dùng sách với ý thức tự chủ cao và không dùng sách theo cách chỉ "đọc" các lời giải có sẵn của các bài tập trong SGK.

Các tác giả

CHƯƠNG I: VECTƠ

§1. CÁC ĐỊNH NGHĨA

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Vectơ là một đoạn thẳng định hướng, nghĩa là trong đoạn thẳng đó người ta đã chỉ ra điểm mút nào là điểm đầu, điểm mút nào là điểm cuối.

Vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là B, được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$ (đọc là vectơ AB).

Quy ước: Vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau là vectơ không. Kí hiệu là $\vec{0}$.

2. Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ được gọi là giá của vectơ đó.

Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

3. Hai vectơ cùng khác vectơ không và cùng phương thì hoặc là cùng hướng hoặc là ngược hướng.

Quy ước: vectơ không cùng phương với mọi vectơ, và cùng hướng với mọi vectơ.

4. Ba điểm phân biệt A, B và C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

5. Độ dài của một vectơ $\vec{a}$ chính là độ dài của đoạn thẳng nối điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó, kí hiệu là $|\vec{a}|$. Ta có $|\vec{0}| = 0$.

6. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài, khi đó ta viết $\vec{a} = \vec{b}$.

$$\text{Vậy } \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}, \vec{b} \text{ cùng hướng} \\ |\vec{a}| = |\vec{b}| \end{cases}$$

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Các khẳng định sa đây đúng hay sai?

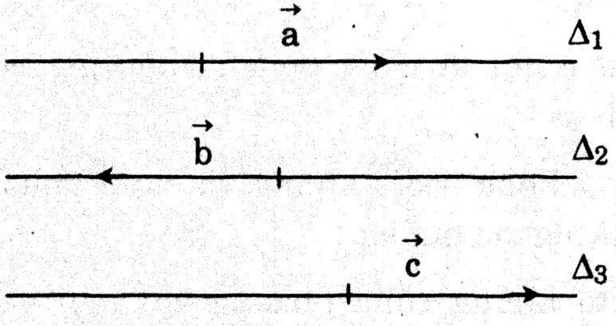
a) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

b) Nếu $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng ngược hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

Hướng dẫn giải

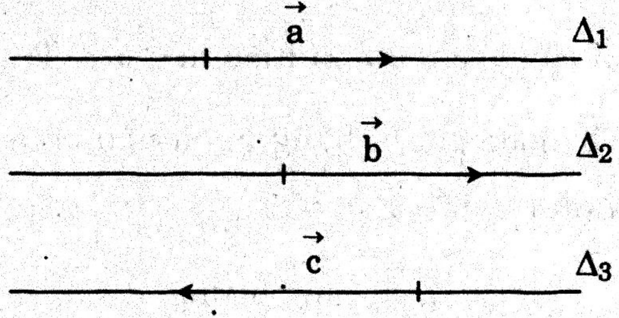
a) Ta gọi Δ_1, Δ_2, Δ_3 lần lượt là giá của $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$. Vì $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùn phương với $\vec{c}$ nên Δ_1 song song hoặc trùng Δ_3 và Δ_2 song song hoặ trùng Δ_3, từ đấy suy ra Δ_1 song song hoặc trùng Δ_2, tức là $\vec{a}$ v $\vec{b}$ cùng phương.

Vậy khẳng định đã cho là đúng.

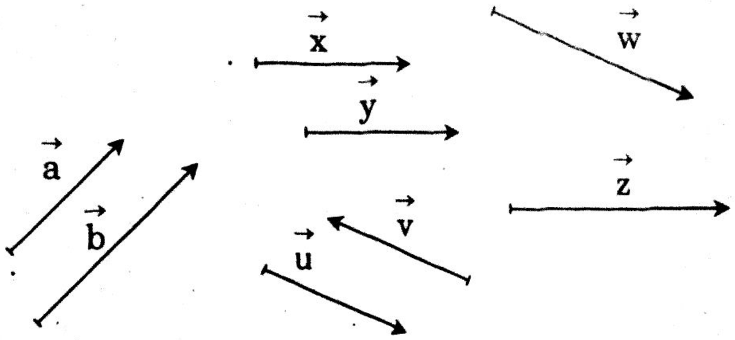


b) Nếu $\vec{a}$ ngược hướng với $\vec{b}$ thì $\vec{b}$ và $\vec{c}$ cùng hướng, ta có mâ thuẫn.

Vậy $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.



Bài 2. Trong hình vẽ dưới đây, hãy chỉ ra các vectơ cùng phương, cùng hướng, ngược hướng và các vectơ bằng nhau.

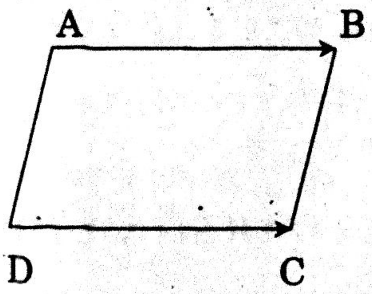


Hướng dẫn giải

- $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng, chúng không bằng nhau vì $|\vec{a}| \neq |\vec{b}|$.
- $\vec{x} = \vec{y}$ vì từ hình vẽ ta thấy $\vec{x}$, $\vec{y}$ cùng hướng và $|\vec{x}| = |\vec{y}|$.
- $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ là cùng hướng (hiển nhiên chúng cùng phương).
- $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ là cùng phương; $\vec{u}$, $\vec{v}$ ngược hướng và $\vec{u}$, $\vec{w}$ cùng hướng.

Bài 3. Chứng minh rằng tứ giác ABCD là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Giải



Giả sử tứ giác ABCD là hình bình hành.

Khi đó AB = DC ⇒ $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$.

Mặt khác, dễ thấy $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$ cùng hướng.

Từ đấy, suy ra $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Ngược lại, giả sử tứ giác ABCD có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, điều này chứng tỏ:

$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$ và AB // CD

hay AB = CD và AB // CD

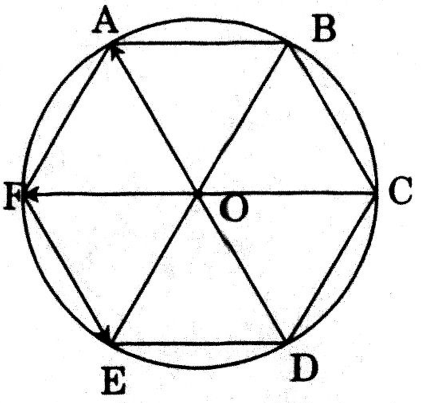
nên tứ giác ABCD là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết hình bình hành).

Bài 4. Cho lục giác đều ABCDEF có tâm là điểm O. Hãy tìm các vectơ khác vectơ không; có điểm đầu, điểm cuối là hai trong số bảy điểm A, B, C, D, E, F và O thoả mãn:

a) Cùng phương với $\overrightarrow{OA}$.

b) Bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$.

Giải



Tâm O của lục giác đều chính là tâm đường tròn đi qua sáu điểm A, B, C, D, E, F. Vì ABCDEF là lục giác đều nên các tứ giác ABCO, BCDO, CDEO, DEFO, EFAO, FABO là các hình thoi bằng nhau.

a) Ta thấy giá của các vectơ: $\vec{CD}$, $\vec{DO}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$, $\vec{DA}$, $\vec{EF}$, $\vec{FE}$, $\vec{BC}$, $\vec{CB}$ song song hoặc trùng với giá của vectơ $\vec{OA}$, do vậy chín vectơ trên cùng phương với vectơ $\vec{OA}$.

b) Do các tứ giác nói trên là những hình thoi bằng nhau nên:

$$|\vec{AB}| = |\vec{FO}| = |\vec{OC}| = |\vec{ED}| \ (1)$$

Mặt khác dễ thấy rằng các vectơ $\vec{AB}$, $\vec{FO}$, $\vec{OC}$, $\vec{ED}$ là cùng hướng (2).

Từ (1) và (2) ta có những vectơ bằng vectơ $\vec{AB}$ là $\vec{FO}$, $\vec{OC}$, $\vec{ED}$.

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Bài 5. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Có hay không vectơ cùng phương với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

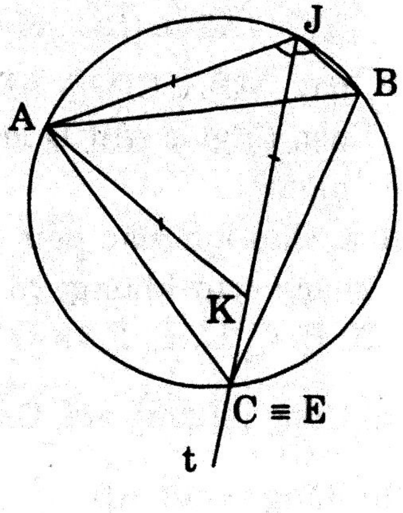
Bài 5. Từ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nên ta có $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$.

Giả sử $\vec{x}$ là vectơ cùng phương với cả $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Nếu $\vec{x} \neq \vec{0}$ thì suy ra giá của vectơ $\vec{a}$ song song hoặc trùng với giá của vectơ $\vec{b}$, tức là các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương, mâu thuẫn với giả thiết.

Nếu $\vec{x} = \vec{0}$ thì hiển nhiên $\vec{x}$ cùng phương với cả $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Vậy có duy nhất vectơ $\vec{0}$ là vectơ cùng phương với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

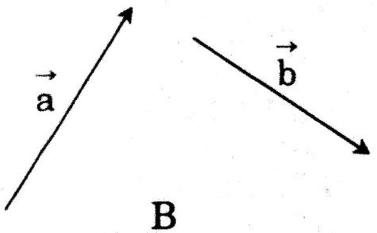


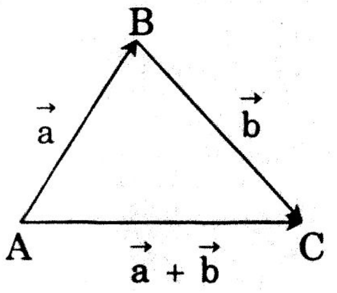
§2. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

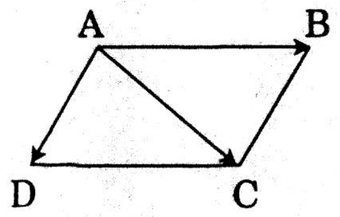
Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy một điểm A tuỳ ý, dựng $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vactơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Ta ký hiệu tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $\vec{a} + \vec{b}$. Vậy $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.





2. Quy tắc hình bình hành: Nếu tứ giác ABCD là hình bình hành thì ta có:

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}.$$



3. Tính chất

Với ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ tuỳ ý ta có:

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (tính chất giao hoán);
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (tính chất kết hợp);
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

4. Định nghĩa

Cho vectơ $\vec{a}$, ta gọi vectơ đối của vectơ $\vec{a}$ là vectơ có cùng độ dài với vectơ $\vec{a}$ và ngược hướng với $\vec{a}$, kí hiệu vectơ đối của $\vec{a}$ là $-\vec{a}$.

Vậy $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

5. Với ba điểm A, B, C tuỳ ý ta luôn có:

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

Hai quy tắc trên thường được gọi là quy tắc ba điểm.

6. I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

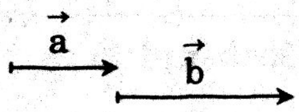
8. G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

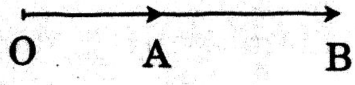
Bài 1. Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ và cùng phương. Xác định: $\vec{a} + \vec{b}$; $\vec{a} - \vec{b}$.

Giải

* *Trường hợp 1:* $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng.

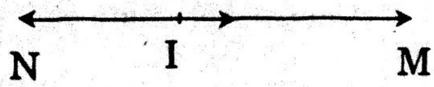


Từ điểm O ta dựng: $\vec{OA} = \vec{a}$; $\vec{AB} = \vec{b}$.



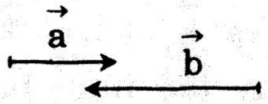
Khi đó vectơ $\vec{OB} = \vec{a} + \vec{b}$.

Từ điểm I ta dựng $\vec{IM} = \vec{a}$, $\vec{MN} = -\vec{b}$.



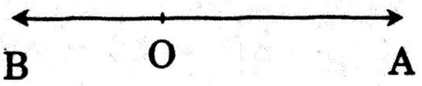
Khi đó ta có $\vec{IN} = \vec{a} - \vec{b}$.

* *Trường hợp 2:* $\vec{a}$, $\vec{b}$ ngược hướng

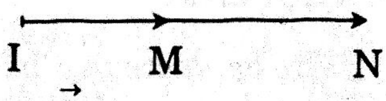


Từ điểm O (bất kỳ) dựng:

$\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{AB} = \vec{b}$.



Khi đó vectơ $\vec{OB} = \vec{a} + \vec{b}$.

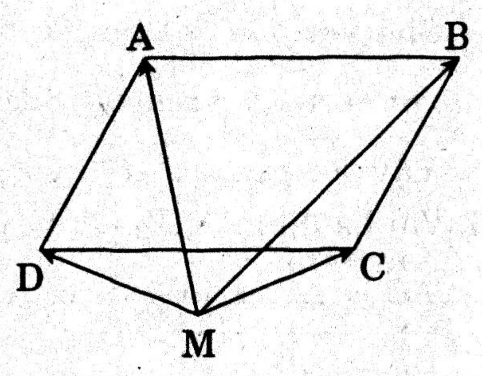


Từ điểm I (bất kỳ) ta dựng $\vec{IM} = \vec{a}$, $\vec{MN} = -\vec{b}$.

Khi đó ta có $\vec{IM} = \vec{a}$.

Bài 2. Cho hình bình hành ABCD và một điểm M tuỳ ý. Chứng minh rằng $\vec{MA} + \vec{MC} = \vec{MB} + \vec{MD}$ (1)

Giải



Do đẳng thức (1) nên ta có:

$\vec{MA} + \vec{MC} + (-\vec{MC} - \vec{MB})$

$= \vec{MB} + \vec{MD} + (-\vec{MC} - \vec{MB})$

$\Leftrightarrow \vec{MA} + \vec{MC} + (-\vec{MC}) + (-\vec{MB})$

$= \vec{MB} + \vec{MD} - \vec{MC} - \vec{MB}$

$\Leftrightarrow \vec{MA} - \vec{MB} = \vec{MD} - \vec{MC} \Leftrightarrow \vec{BA} = \vec{CD}$.

Vì ABCD là hình bình hành nên $\vec{BA} = \vec{CD}$, do vậy (1) là đẳng thức đúng.

Bài 3. Chứng minh rằng đối với tứ giác ABCD bất kì ta luôn có:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$;

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$.

Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Hiển nhiên đẳng thức cuối cùng là đúng nên ta có:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}.$$

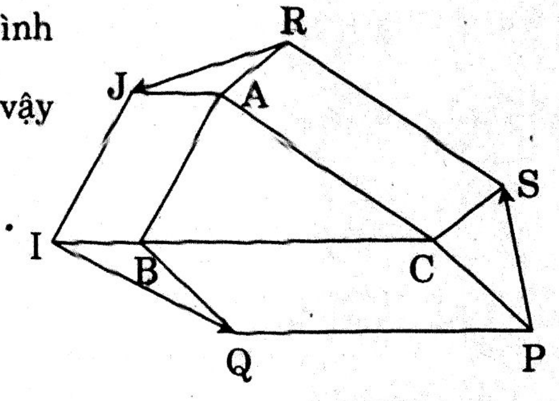
b) Ta có: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DB}$

Từ đó suy ra $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$.

Bài 4. Cho tam giác ABC, bên ngoài tam giác vẽ các hình bình hành ABIJ, BCPQ, CARS. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{RJ} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PS} = \vec{0}$.

Giải

Vì tứ giác ABIJ là hình bình hành, nên $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{JA}$, do vậy $\overrightarrow{IQ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BQ}$ hay $\overrightarrow{IQ} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{BQ}$ (1).



Vì tứ giác BCPQ là hình bình hành, nên $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{QB}$, do vậy $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CS}$ hay

$\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{AR}$ (2) (vì $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{CS}$).

Ta cũng có $\overrightarrow{RJ} = \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AJ}$ (3)

Từ các đẳng thức (1), (2), (3), ta có:

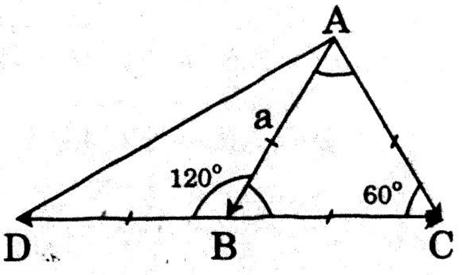
$$\overrightarrow{RJ} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{AR}$$

$$= \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{BB} + \overrightarrow{AR}$$

$$= \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} + \overrightarrow{AR}$$

$$= \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AR} = \overrightarrow{RR} = \overrightarrow{0}.$$

Bài 5. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a. Tính độ dài các vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$.



Giải

- Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

  $\Rightarrow |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}| = a.$

- Ta có $-\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB}$ (vì $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{CB}$ là hai vectơ đối nhau), nên

  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}.$

  Dựng D sao cho B là trung điểm của DC, khi đó hai vectơ $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BD}$ cùng hướng và cùng độ dài nên $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BD}$, do vậy

  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AD}|.$

  Mặt khác tam giác DAC có BA là đường trung tuyến thoả mãn BA $= BD = BC \Rightarrow BA = \frac{1}{2}DC$ (vì BD = BC)

  $\Rightarrow$ Tam giác DAC vuông tại A và có AC = a, DC = a + a = 2a.

  Áp dụng định lí Pitago ta có $AD^2 = DC^2 - AC^2 = 3a^2 \Rightarrow AD = a\sqrt{3}$.

  Vậy $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}| = a\sqrt{3}$.

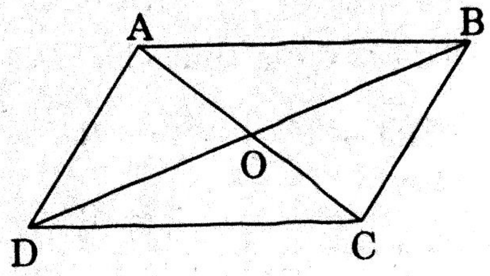
Bài 6. Cho hình bình hành ABCD có tâm O. Chứng minh:

a) $\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$; b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DB}$;

c) $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$; d) $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{0}$.

Giải

a) Vì ABCD là hình bình hành nên O là trung điểm của BD và AC.



Bởi vậy: $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$,

$\Rightarrow -\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OD}$.

Do đó $\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{CD}$.

Mặt khác ABCD là hình bình hành nên $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}.$$

b) Ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$, lại vì ABCD là hình bình hành nên $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$, do vậy ta có:

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}.$$

c) Ta có $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CD}$, vì ABCD là hình bình hành, nên $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$, từ đó suy ra $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$.

d) Ta có $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$.

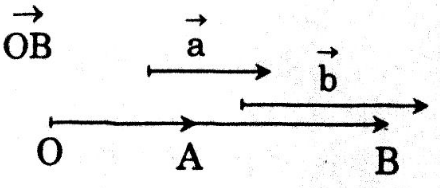
Bài 7. Cho $\vec{a}$, $\vec{b}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$, khi nào có đẳng thức:

a) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$

b) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$

Giải

a) Dựng $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, khi đó $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OB}$

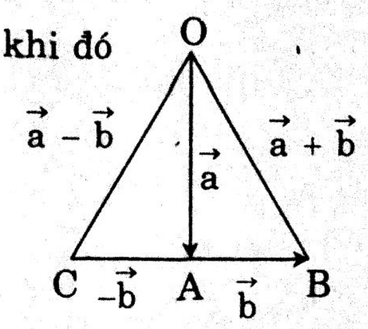


$$\Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = |\overrightarrow{OB}|.$$

Ta có $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$

$\Leftrightarrow$ OB = OA + AB $\Leftrightarrow$ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ = cùng hướng.

b) Từ điểm O ta dựng $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ $\overrightarrow{AC} = -\vec{b}$, khi đó



$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB};$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$$

Vì $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ nên OB = OC.

Chú ý rằng B, A, C thẳng hàng nên OBC là tam giác cân với OA là trung tuyến suy ra OA là đường cao hay OA ⊥ AB

$\Leftrightarrow$ $\vec{a} \perp \vec{b}$ (Chú ý rằng trường hợp $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương không thể xảy ra với đẳng thức trên).

Bài 8. a) Cho $|\vec{a}+\vec{b}|=0$. So sánh độ dài, phương và hướng của hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$.

b) Chứng minh rằng nếu $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ thì $\vec{a}=\vec{c}-\vec{b}$.

Giải

a) Dễ thấy $\vec{x}=0 \Leftrightarrow \vec{x}=\vec{0}$, do đó $|\vec{a}+\vec{b}|=0 \Leftrightarrow \vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$.

Suy ra $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ đối nhau, tức là $|a|=|b|$ và $\vec{a}$, $\vec{b}$ ngược hướng.

b) Ta có $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ nên $\vec{a}+\vec{b}+(-\vec{b})=\vec{c}+(-\vec{b})$

$\Leftrightarrow \quad \vec{a}+(\vec{b}-\vec{b})=\vec{c}-\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}=\vec{c}-\vec{b}$.

Bài 9. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ khi và chỉ khi trung điểm của hai đoạn thẳng AD và BC trùng nhau.

Giải

Gọi I là trung điểm của AD, khi đó $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{ID}=\overrightarrow{O}$

Ta có: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{ID}-\overrightarrow{IC}$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IA}$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{O}$

$\Leftrightarrow$ I là trung điểm của BC.

Bài 10. Cho ba lực $\overrightarrow{F_1}=\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết cường độ của $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$ đều là 100N. Tìm cường độ và hướng của lực $\overrightarrow{F_3}$.

Giải

Do ba lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ cùng tác động vào vật mà vật đứng yên nên tổng hợp lực phải bằng vectơ không tức là:

$$\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0} \quad (*).$$

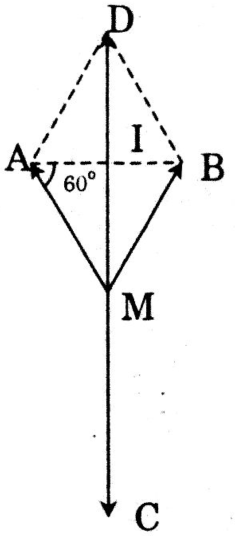
Dựng hình bình hành AMBD, ta có:

$(*) \Leftrightarrow \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ M là trung điểm của DC như vậy hướng của lực $\overrightarrow{F_3}$ ngược với hướng của tổng hợp lực $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$. Ta tính cường độ của lực $\overrightarrow{F_3}$ ta có:

$$\left|\overrightarrow{F_3}\right| = \left|\overrightarrow{MD}\right| = 2MI$$

$$= 2\frac{100\sqrt{3}}{2} = 100\sqrt{3}\,(N).$$



II. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Bài 11. Cho bốn điểm A, B, C, D bất kì, chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}.$$

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 11. Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$ (vì O là điểm bất kì)

$$= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD}$$

§3. PHÉP NHÂN MỘT SỐ VỚI MỘT VECTƠ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Cho số $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của số k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, cùng hướng với $\vec{a}$ khi $k > 0$, ngược hướng với $\vec{a}$ khi $k < 0$ và có độ dài bằng $|k|\,|\vec{a}|$.

Quy ước: $0.\vec{a} = \vec{0}$, $k.\vec{0} = \vec{0}$.

2. Tính chất

Với mọi vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và mọi số thực k, h, ta có:

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b};$$

$$(h + k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a};$$

$$h(k\vec{a}) = (h\,k)\vec{a};$$

$$1.\vec{a} = \vec{a}; (-1)\vec{a} = -\vec{a}.$$

3. – Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì với mọi điểm M ta có:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}.$$

– Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì với mọi điểm M ta có:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}.$$

4. Định lí

Điều kiện cần và đủ để $\vec{a}$ và $\vec{b} \neq \vec{0}$ cùng phương với nhau là c một số k để $\vec{a} = k\vec{b}$.

5. Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương, khi đó với mọi vectơ $\vec{x}$ đều phân tích được một cách duy nhất theo hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ nghĩa là có duy nhất cặp số h, k sao cho: $\vec{x} = h\vec{a} + k\vec{b}$.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Cho hình bình hành ABCD. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}.$$

Giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AC}$ (1).

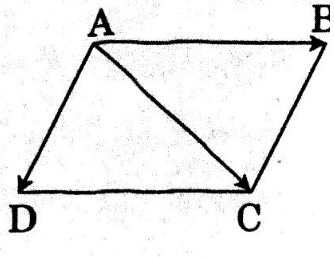
Theo quy tắc hình bình hành ta có:

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}.$$



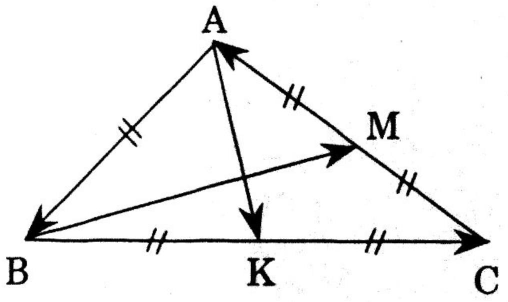
Bài 2. Cho AK và BM là hai trung tuyến của tam giác ABC. Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ theo hai vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{AK}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BM}$.

Giải

Do tính chất trung điểm nên từ giả thiết ta có:

$$\begin{cases} 2\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\ 2\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA} = 2\vec{u} & (1) \\ -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\vec{v} & (2) \end{cases}$$



Mặt khác, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0} \qquad (3)$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}) + (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = 2\vec{u} + 2\vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\vec{u} + 2\vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} = 2\vec{u} + 2\vec{v} \qquad (4)$$

Từ (2) và (3) ta có:

$$-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 2\vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 2\vec{v} \qquad (5)$$

Từ (4) và (5) suy ra:

$$-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 2\vec{u} + 2\vec{v} + 2\vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\overrightarrow{BC} = 2\vec{u} + 4\vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\vec{u} + \frac{4}{3}\vec{v} \qquad (6)$$

Từ (5) và (6) ta có:

$$\frac{4}{3}\vec{u} + \frac{8}{3}\vec{v} + \overrightarrow{CA} = 2\vec{v} \Rightarrow \overrightarrow{CA} = -\frac{4}{3}\vec{u} - \frac{2}{3}\vec{v} \qquad (7)$$

Từ (7) và (1), ta có được:

$$\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v} = 2\vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\vec{u} - \frac{2}{3}\vec{v}$$

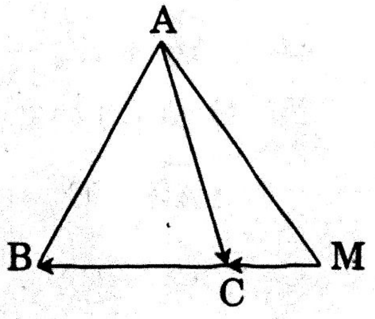
Kết luận: $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\vec{u} - \frac{2}{3}\vec{v}$;

$\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\vec{u} + \frac{4}{3}\vec{v}$;

$\overrightarrow{CA} = -\frac{4}{3}\vec{u} - \frac{2}{3}\vec{v}$

Bài 3. Trên đường thẳng chứa cạnh BC của tam giác ABC lấy một điểm M sao cho $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$. Hãy phân tích vectơ $\overrightarrow{AM}$ theo hai vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ và $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Giải



Ta có: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}$ (1)

Vì $\overrightarrow{CM}$ cùng hướng với $\overrightarrow{BC}$, hơn nữa $|\overrightarrow{BC}| = 2|\overrightarrow{CM}|$, nên

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Vậy $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{u}$.

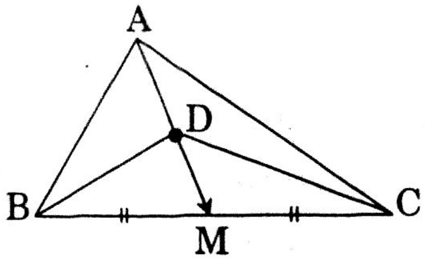
Bài 4. Gọi AM là trung tuyến của tam giác ABC và D là trung điểm của AM. Chứng minh rằng:

a) $2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$;

b) $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OD}$, với O là điểm tùy ý.

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{DA}$ cùng hướng với $\overrightarrow{MA}$, hơn nữa 2DA = MA.



Từ đó suy ra $\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{DA}$ (1)

Mặt khác, do M là trung điểm của đoạn BC nên ta có:

$$\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{DM}$$

Vì $\overrightarrow{DM}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AM}$ và AM = 2DM

nên $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{DM}$ trở thành $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có:

$$2\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MM} = \vec{0}.$$

b) Ta có: $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DA}$;

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC}$ nên:

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} &= 2(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DA}) + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC}\\ &= 2\overrightarrow{OD} + 2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC}\\ &= 4\overrightarrow{OD} + 2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 4\overrightarrow{OD}\end{aligned}$$

(vì $2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} \equiv \vec{0}$ ở câu a).

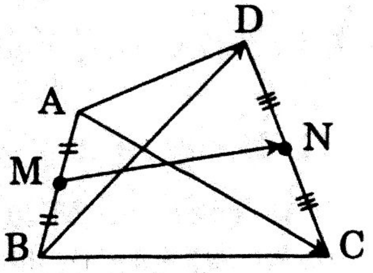
ài 5. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD của tứ giác ABCD. Chứng minh rằng: $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$.

Giải

Ta có $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}$

$$= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}.$$

Ta chỉ cần chứng minh cho $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.



Thật vậy, ta có:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN}$$

Từ hai đẳng thức này suy ra:

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN}) \qquad (1)$$

Vì M là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ (2)

Vì N là trung điểm của CD nên

$$\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{CN} = -\overrightarrow{NC} - \overrightarrow{ND} = -(\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND}) = \vec{0} \qquad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra đẳng thức (1) trở thành:

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \vec{0} + \vec{0}$$

Hay $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

Bài 6. Cho hai điểm phân biệt A và B. Tìm điểm K sao cho:

$$3\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0}.$$

Giải

Từ giả thiết ta có:

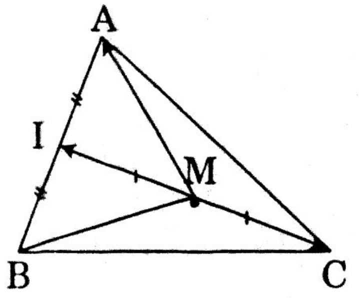
$$3\overrightarrow{KA} = -2\overrightarrow{KB} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{KB}$$

Vậy điểm K chia đoạn AB theo tỉ số $-\frac{2}{3}$. Rõ hơn, nếu ta chia đoạ thẳng AB thành năm phần bằng nhau thì điểm K nằm giữa A và sao cho KA bằng hai phần, KB bằng ba phần.

Bài 7. Cho tam giác ABC. Tìm điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

Giải

Gọi I là trung điểm của BA. Khi đó ta có đẳng thức:



$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}.$$

Do đó: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$\Rightarrow \quad 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \quad 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MC}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ M là trung điểm của CI.

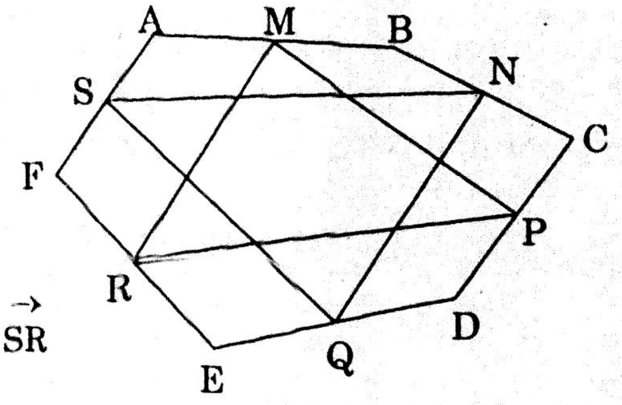
Bài 8. Cho lục giác ABCDEF. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA. Chứng minh rằng hai tam giác MPR và NQS có cùng trọng tâm.

Giải

Gọi G là trọng tâm của tam giác MPR. Khi đó ta có đẳng thức vectơ:

$$\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GR} = \vec{0} \qquad (1)$$

Để chứng minh cho hai tam giác MPR và NQS có cùng trọng tâm, ta sẽ chứng minh cho G cũng là trọng tâm của tam giác NQS, điều này tương đương đẳng thức:



$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{GS} = \vec{0}$$

Thật vậy, ta có:

$\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{NM}$;

$\overrightarrow{GP} = \overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{QP}$; $\overrightarrow{GR} = \overrightarrow{GS} + \overrightarrow{SR}$

Ta suy ra: (1)

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{GS} + \overrightarrow{SQ} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \quad (\overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{GS}) + (\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{SR}) = \vec{0}.$

Mặt khác: $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BM}$; $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{DP}$; $\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{SF} + \overrightarrow{FR}$

Suy ra: $\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{SR} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{SF} + \overrightarrow{FR}$ (3)

Vì M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, EF, FA

nên ta có: $\overrightarrow{NB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{QD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ED}$;

$$\overrightarrow{DP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC};\ \overrightarrow{SF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AF};\ \overrightarrow{FR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$$

Do đó (3) trở thành:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{SR} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ED} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FE}\\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{AF}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{CC} = \vec{0}\end{aligned}$$

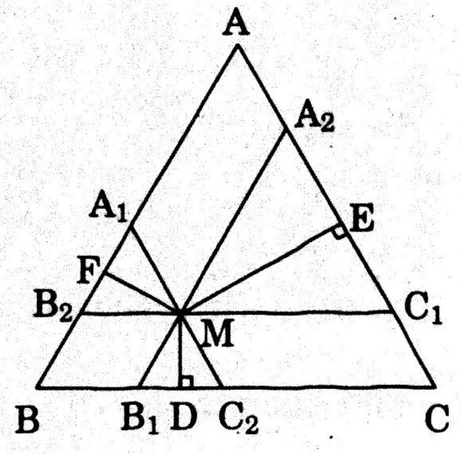
Vậy $\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{GS} = \vec{0}$ (4)

Từ (2) và (4) ta được $\overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{GS} = \vec{0}$.

Bài 9. Cho tam giác đều ABC với O là trọng tâm và M là điểm tùy ý trong tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ M đến BC, AC, AB. Chứng minh:

$$\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$$

Giải



Qua M dựng đường thẳng song song với AB cắt AC tại A_2, cắt BC tại B_1.

Qua M dựng đường thẳng song song với BC cắt AB tại B_2, cắt AC tại C_1.

Qua M dựng đường thẳng song song với AC cắt BC tại C_2, cắt AB tại A_1.

Do tam giác ABC là tam giác đều nên dễ dàng chứng minh được các tam giác MB_1C_2, MC_1A_2, MA_1B_2 cũng là tam giác đều. Từ đây ta suy ra F, D, E lần lượt là trung điểm của các đoạn A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 hay ta có các đẳng thức vectơ sau:

$$2\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_2}\ ;\ 2\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MA_2}\ ;\ 2\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_2}$$

Suy ra: $2(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF})$

$$= \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_2} + \overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_2}.$$

Hay $2(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF})$

$$= (\overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MB_2}) + (\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2}) + (\overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MC_2}) \qquad (1)$$

Do cách dựng hình nên ba tứ giác MB_1BB_2, MC_1CC_2, MA_1AA_2 đều là những hình bình hành, vì vậy theo quy tắc hình bình hành ta có các đẳng thức vectơ sau:

$$\overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MB_2} = \overrightarrow{MB}\ ;\ \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} = \overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MC_2} = \overrightarrow{MC}$$

Khi đó (1) trở thành:

$$2(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}) = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \qquad (2)$$

Lại vì O là trọng tâm của tam giác ABC nên ta có đẳng thức:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MO} \qquad (3)$$

Từ (2) và (3) ta suy ra:

$$2(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}) = 3\overrightarrow{MO} \Leftrightarrow \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}.$$

II. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Bài 10. Cho G là trọng tâm của tam giác ABC. Trên cạnh AB lấy hai điểm M, N sao cho AM = MN = NB.

a) Chứng minh rằng G cũng là trọng tâm tam giác MNC.

b) Đặt $\overrightarrow{GA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{GB} = \vec{b}$. Hãy biểu thị các vectơ sau đây qua $\vec{a}, \vec{b}$: $\overrightarrow{GC}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{GM}, \overrightarrow{CN}$.

Bài 11*. Cho tam giác ABC, gọi O, G, H theo thứ tự là tâm đường tr ngoại tiếp, trọng tâm, trực tâm của tam giác ABC và I là tâ đường tròn đi qua các trung điểm của ba cạnh. Chứng minh:

a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$;

b) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO} = 3\overrightarrow{HG}$.

Bài 12. Cho tứ giác ABCD, trên các cạnh AB và CD lần lượt lấy c điểm M, N sao cho: $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DN} = k\overrightarrow{DC}$ $(k \neq 1)$.

a) Hãy phân tích vectơ $\overrightarrow{MN}$ theo $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$.

b) Gọi P, Q, I lần lượt là các điểm thuộc AD, BC, MN sao c $\overrightarrow{AP} = l\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BQ} = l\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MI} = l\overrightarrow{MN}$. Chứng minh ba điểm P, Q thẳng hàng.

Bài 13*. Cho tam giác ABC, gọi H là trực tâm, I là tâm đường tròn n tiếp, chứng minh:

a) $a.\overrightarrow{IA} + b.\overrightarrow{IB} + c.\overrightarrow{IB} = \vec{0}$

b) $\tan A.\overrightarrow{HA} + \tan B.\overrightarrow{HB} + \tan C.\overrightarrow{HC} = \vec{0}$.

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 12.

a) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

b) $\overrightarrow{GC} = -(\vec{a} + \vec{b})$.

$\overrightarrow{AC} = 2\vec{a} - \vec{b}$.

$\overrightarrow{GM} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

$\overrightarrow{CN} = \frac{4}{3}\vec{a} + \frac{5}{3}\vec{b}$.

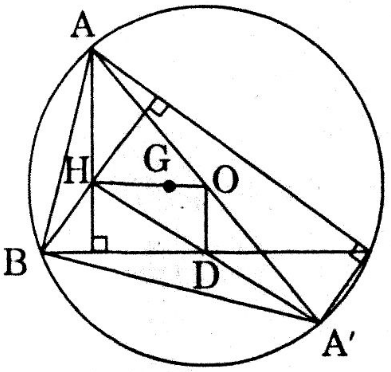
ài 11.

a) Gọi A′ là điểm đối xứng với A qua O, D là trung điểm BC. Ta có tứ giác BHCA′ là hình bình hành.

Vậy A′, D, H thẳng hàng.

Ta có: $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OD}$.

Mặt khác: OD là đường trung bình của ΔA′AH nên $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$.



Suy ra: $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AH}$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA}$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH} \qquad (1)$

Ta lại có:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC}$$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG} \qquad (2)$

(Vì G là trọng tâm ΔABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$)

Từ (1) và (2) ta có:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}.$$

b) Ta có: $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GC}$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 3\overrightarrow{HG}$ (vì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$) $\qquad (3)$

Mặt khác: $3\overrightarrow{HG} = 3(\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OG}) = 3\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{HO} \qquad (4)$

Từ (3) và (4): $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 3\overrightarrow{HG} = 2\overrightarrow{HO}$.

ài 12. a)

$\overrightarrow{MN} = (1 - k)\overrightarrow{AD} + k\overrightarrow{BC}$.

b) Theo câu a)

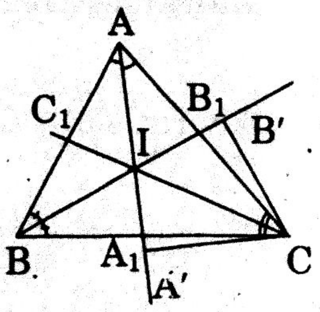
+ $\overrightarrow{PI} = (1-l)\overrightarrow{AM} + l\overrightarrow{DN} = (1-l)k\overrightarrow{AB} + lk\overrightarrow{DC}$

$= k[(1-l)\overrightarrow{AB} + l\overrightarrow{DC}]$ (1)

+ Tương tự ta có: $\overrightarrow{IQ} = (1-k)[(1-l)\overrightarrow{AB} + l\overrightarrow{DC}]$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $\overrightarrow{PI} = \dfrac{k}{1-k}\overrightarrow{IQ}$

Suy ra P, I, Q thẳng hàng.



Bài 13.

a) Ta dựng hình bình hành IA'CB', ta có:

$\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IB'} + \overrightarrow{IA'} = \alpha\overrightarrow{IB} + \beta\overrightarrow{IA}$.

Vì $\overrightarrow{IB'}$ cùng phương ngược chiều $\overrightarrow{IB}$ nên

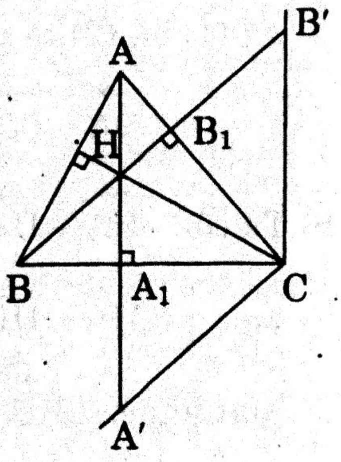
$\alpha = -\dfrac{IB'}{IB} = -\dfrac{B_1C}{B_1A} = \dfrac{a}{c}$.

Suy ra: $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

b) (Xét ΔABC nhọn, còn nếu ΔABC tù bạn đọc tự chứng minh)

Dựng hình bình hành HA'CB' ta có:

$\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{HB'} = k\overrightarrow{HA} + l\overrightarrow{HB}$.



Do $\overrightarrow{HA}$ và $\overrightarrow{HA'}$ ngược hướng

$k = -\dfrac{HA'}{HA} = -\dfrac{B_1C}{B_1A} = -\dfrac{BB_1\cot C}{BB_1\cot A}$

$k = -\dfrac{\tan A}{\tan C}$.

Tương tự: $l = -\dfrac{\tan B}{\tan C}$

Nên $\overrightarrow{HC} = -\dfrac{\tan A}{\tan C}\overrightarrow{HA} - \dfrac{\tan B}{\tan C}\overrightarrow{HB}$

$\Leftrightarrow \tan A.\overrightarrow{HA} + \tan B.\overrightarrow{HB} + \tan C.\overrightarrow{HC} = \vec{0}$.

§4. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Trục tọa độ

a) Trục tọa độ (hay gọi tắt là trục) là một đường thẳng, trên đó đã xác định điểm O là điểm gốc và một vectơ đơn vị $\vec{e}$.

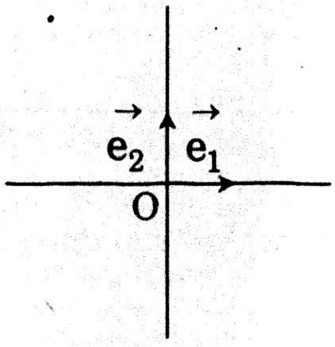
Kí hiệu trục là (O; $\vec{e}$).

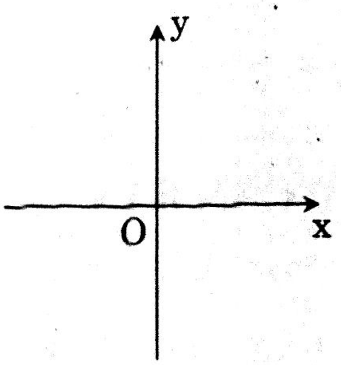
b) M là một điểm tùy ý trên trục. Khi đó tồn tại duy nhất số $k \in R$ $\overrightarrow{OM} = k\vec{e}$. Ta gọi số k là tọa độ của M đối với trục đã cho.

c) Cho hai điểm A và B trên trục (O; $\vec{e}$) khi đó có duy nhất một số thực a sao cho $\overrightarrow{AB} = k\vec{e}$. Ta gọi a là độ dài đại số của $\overrightarrow{AB}$ đối với hệ trục đã cho và kí hiệu: $a = \overline{AB}$.

2. Hệ trục

a) Hệ trục tọa độ (O; $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$) gồm hai trục tọa độ (O; $\vec{e_1}$) và (O; $\vec{e_2}$) vuông góc với nhau. Điểm O chung của hai trục được gọi là gốc tọa độ. Trục (O; $\vec{e_1}$) được gọi là trục hoành và kí hiệu là Ox, trục (O; $\vec{e_2}$) gọi là trục tung và kí hiệu là Oy. Hệ trục (O; $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$) còn được kí hiệu là Oxy.





b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $\vec{u}$ tùy ý. Với mỗi $\vec{u}$ thì tồn tại duy nhất một cặp số thực (u_1; u_2) sao cho $\vec{u} = u_1\vec{e_1} + u_2\vec{e_2}$.

Ta gọi cặp số (u_1; u_2) là tọa độ của $\vec{u}$ đối với hệ trục Qxy và viết là $\vec{u} = (u_1; u_2)$ hoặc $\vec{u}(u_1; u_2)$.

c) Nếu $\vec{u}(u_1; u_2)$, $\vec{v}(v_1; v_2)$ thì

+ $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \end{cases}$

+ $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1; u_2 + v_2)$

+ $\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1; u_2 - v_2)$

+ $k\vec{u} = (ku_1; ku_2)$ $k \in R$.

d) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tọa độ của điểm M bất kì là tọa độ của $\vec{OM}$, như vậy nếu $\vec{OM} = (x; y)$, ta nói điểm M có tọa độ (x; y) và viết M(x; y) hoặc M = (x; y).

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy nếu $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, khi đó:

+ $\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$

+ Tọa độ trung điểm $I(x_I; y_I)$ của AB: $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$

+ $AB = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Cho ΔABC với $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$. Khi đó $G(x_G; y_G)$ là trọng tâm của tam giác ABC thì:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$$

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\vec{a}(-3; 0)$ và $\vec{e_1}$ ngược hướng;

b) Hai vectơ $\vec{a}(3; 4)$ và $\vec{b}(-3; -4)$ là hai vectơ đối nhau;

c) Hai vectơ $\vec{a}(5; 3)$ và $\vec{b}(3; 5)$ là hai vectơ đối nhau;

d) Hai vectơ bằng nhau khi và chỉ khi chúng có hoành độ bằng nhau và tung độ bằng nhau.

Giải

a) Ta có $\vec{a} = -3\vec{e_1}$ (vì $\vec{e_1}(1;\ 0)$) nên hai vectơ $\vec{a}(-3;\ 1)$ và $\vec{e_1}$ ngược hướng.

Vậy khẳng định (a) là đúng.

b) Với $\vec{a}\ (3;\ 4)$ và $\vec{b}(-3;\ -4)$ thì

$\vec{a} = -\vec{b}$ vậy hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đối nhau.

Nên đáp án (b) là đúng.

c) Với $\vec{a}(5;\ 3)$ thì vectơ đối của của $\vec{a}$ là $-\vec{a} = (-5;\ -3)$ do đó $\vec{b}(5;\ 3)$ không là vectơ đối của $\vec{a}$. Khẳng định (c) là sai.

d) Khi hai vectơ có hoành độ bằng nhau và tung độ bằng nhau thì chúng bằng nhau là đúng, vậy khẳng định (d) là khẳng định đúng.

Tóm lại:

Các khẳng định đúng là (a), (b) và (d).

Khẳng định sai là (c).

Bài 2. Tìm toạ độ của các vectơ sau:

a) $\vec{a} = 2\vec{e_1}$;

b) $\vec{b} = -3\vec{e_2}$;

c) $\vec{c} = 3\vec{e_1} - 4\vec{e_2}$;

d) $\vec{d} = 0{,}2\vec{e_1} + 1{,}4\vec{e_2}$.

Giải

a) $\vec{a} = 2\vec{e_1}$

$\vec{a} = 2\vec{e_1} + 0.\vec{e_2}$; vậy $\vec{a}\ (2;\ 0)$

b) $\vec{b} = -3\vec{e_2}$

$\vec{b} = 0\vec{e_1} - 3\vec{a}$, vậy $\vec{b}(0;\ -3)$

c) $\vec{c} = 3\vec{e_1} - 4\vec{e_2}$, vậy $\vec{c}\ (3;\ -4)$

d) $\vec{d} = 0{,}2\vec{e_1} + 1{,}4\vec{e_2}$, vậy $\vec{d} = (0{,}2;\ 1{,}4)$

Bài 3. Các khẳng định sau đây đúng hay sai?

a) Toạ độ của điểm A là toạ độ của $\overrightarrow{OA}$;

b) Điểm A nằm trên trục hoành thì tung độ bằng 0;

c) Điểm A nằm trên trục tung thì có hoành độ bằng 0;

d) Hoành độ và tung độ của A bằng nhau khi và chỉ khi A nằm trê đường phân giác của góc phần tư thứ nhất và thứ ba.

Giải

a) Theo định nghĩa thì khẳng định (a) đúng.

b) A nằm trên trục hoành thì $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{e_1}$ cùng phương nên:

$$\overrightarrow{OA} = k\overrightarrow{e_1} + 0.\overrightarrow{e_2},$$

Suy ra A(k; 0), vậy khẳng định (b) đúng.

c) Tương tự câu (b). Điểm A nằm trên trục tung thì $\overrightarrow{OA} = 0\overrightarrow{e_1} + l$ hay A(0; l). Vậy khẳng định (c) là đúng.

d) A nằm trên phân giác của góc phần tư thứ nhất và thứ ba khi chỉ khi:

$$\overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}) = (k_1; k_2).$$

Vậy khẳng định (d) là đúng.

Tóm lại: tất cả các khẳng định ở bài tập này đều đúng.

Bài 4. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho điểm M.

a) Tìm toạ độ của điểm A đối xứng với M qua Ox;

b) Tìm toạ độ của điểm B đối xứng với M qua Oy;

c) Tìm toạ độ của điểm C đối xứng với M qua O.

Giải

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, gọi M(x_M; y_M)

a) $\overrightarrow{OM} = x_M\overrightarrow{e_1} + y_M\overrightarrow{e_2}$. A đối xứng với M qua Ox thì:

$\overrightarrow{OA} = x_M\overrightarrow{e_1} - y_M\overrightarrow{e_2}$ nên A(x_M; $-y_M$)

b) Tương tự câu (a).

$\overrightarrow{OB} = -x_M\overrightarrow{e_1} + y_M\overrightarrow{e_2}$ nên B($-x_M$; y_M).

c) C đối xứng với M qua O.

$\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OM} = -x_M\vec{e_1} - y_M\vec{e_2}$ nên $C(-x_M; -y_M)$.

ài 5. Cho hình bình hành ABCD với A(–1; –2), B(3; 2) và C(4; –1). Tìm toạ độ điểm D.

Giải

Giả sử $D(x_0; y_0)$

Tứ giác ABCD là hình bình hành khi và chỉ khi: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_B - x_A = x_C - x_D \\ y_B - y_A = y_C - y_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 4 - x_D \\ 4 = -1 - y_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 0 \\ y_D = -5 \end{cases}.$$

Vậy D(0; –5)

ài 6. Các điểm A'(–4; 1), B'(2; 4) và C'(2; –2) lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, và AB của tam giác ABC. Tính toạ độ các đỉnh của tam giác này. Chứng minh rằng trọng tâm tam giác ABC và A'B'C' trùng nhau.

Hướng dẫn giải

Gọi $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ và $C(x_C; y_C)$

Theo giả thiết:

$$\begin{cases} 2x_{B'} = x_A + x_C \\ 2x_{A'} = x_B + x_C \\ 2x_{C'} = x_B + x_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_C = 4 \\ x_B + x_C = -8 \\ x_B + x_A = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 8 \\ x_B = 4 \\ x_C = -4 \end{cases}$$

Tương tự: $\begin{cases} y_A = 1 \\ y_B = -5 \\ y_C = 7 \end{cases}$

Vậy A(8; 1), B(–4; –5) và C(–4; 7) .

Từ kết quả vừa tính được ở trên và theo giả thiết.

$$\begin{cases} \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = \dfrac{x_{A'} + x_{B'} + x_{C'}}{3} = 0 \\ \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = \dfrac{y_{A'} + y_{B'} + y_{C'}}{3} = 1 \end{cases}$$

Nên hai tam giác ABC wà A'B'C' có chung trọng tâm G(0; 1).

Bài 7. Cho $\vec{a} = (2; 3)$, $\vec{b} = (1; 4)$ hãy phân tích vectơ $\vec{c}(5; 0)$ theo hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

Giải

Giả sử $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ (1)

Theo giả thiết: $\vec{c} = (5; 0)$ (2)

$\vec{a} = (2; 3) \Rightarrow x\vec{a} = (2x; 3x)$ (3)

$\vec{b} = (1; 4) \Rightarrow y\vec{b} = (y; 4y)$ (4)

Từ (3) và (4) ta có: $x\vec{a} + y\vec{b} = (2x + y; 3x + 4y)$ (5)

Từ (1), (2), (5) ta có:

$$\begin{cases} 5 = 2x + y & (6) \\ 0 = 3x + 4y & (7) \end{cases}$$

Từ (1): $y = 5 - 2x$ (8)

Thế (8) vào (7): $3x + 4(5 - 2x) = 0 \Rightarrow 3x + 20 - 8x = 0 \Rightarrow 5x = 20$

$\Rightarrow x = 4$ (9)

Thế vào (8) ta có: $y = 5 - 2.4 \Rightarrow y = -3$.

Vậy: $\vec{c} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$.

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Bài 8. Cho hai điểm phân biệt $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$, ta nói M chia đoạn thẳng B theo tỷ số k nếu $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$ $(k \neq 1)$, chứng minh rằng:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A - kx_B}{1 - k} \\ y_M = \dfrac{y_A - ky_B}{1 - k} \end{cases}$$

Bài 9*. Cho 4 điểm A, B, C, D trên trục. Chứng minh rằng:

a) $\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AC} + \overline{BD}$. Tính hai tổng đó theo $\overline{IJ}$ (trong đó I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD);

b) $\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{AC}.\overline{DB} + \overline{AD}.\overline{BC} = 0$;

c) $AB^2.\overline{CD} + AC^2.\overline{DB} + AD^2.\overline{BC} + \overline{CD}.\overline{DB}.\overline{BC} = 0$.

Bài 10*· Cho 3 điểm A(0; –4), B(–5; 6), C(3; 2)

a) Chứng minh rằng 3 điểm A, B, C không thẳng hàng;

b) Tính chu vi tam giác ABC;

c) Xác định toạ độ chân đường phân giác trong của tam giác ABC hạ từ A.

V. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 8. Theo giả thiết:

$$\overrightarrow{MA} = (x_A - x_M; y_A - y_M);$$

$$\overrightarrow{MB} = (x_B - x_M; y_B - y_M);$$

Vậy $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A - x_M = k(x_B - x_M) \\ y_A - y_M = k(y_B - y_M) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A - kx_B = x_M(1-k) \\ y_A - ky_B = y_M(1-k) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{x_A - kx_B}{1-k} \\ y_M = \dfrac{y_A - ky_B}{1-k} \end{cases}$$

Bài 9*. a) Ta có $\overline{AD} - \overline{AC} = \overline{BD} - \overline{BC} = \overline{CD}$

$\Rightarrow \overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AC} + \overline{BD}$.

Mặt khác ta lại có:

$$\overline{AD} + \overline{BC} = \left(\overline{AI} + \overline{IJ} + \overline{JD}\right) + \left(\overline{BI} + \overline{IJ} + \overline{JC}\right)$$

$$= \left(\overline{AI} + \overline{BI}\right) + \left(\overline{JD} + \overline{JC}\right) + 2\overline{IJ} = 2\overline{IJ}$$

Vậy $\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AC} + \overline{BD} = 2\overline{IJ}$

b) Gọi tọa độ của 4 điểm A, B, C, D lần lượt là a, b, c, d

Ta có $\begin{cases} \overline{AB}.\overline{CD} = (b-a)(d-c) = bd - bc - ad - ac \\ \overline{AC}.\overline{DB} = (c-a)(b-d) = cb - cd - ab - ad \\ \overline{AD}.\overline{BC} = (d-a)(c-d) = dc - db - ac - ab \end{cases}$

Cộng vế với vế các đẳng thức trên, ta được (đpcm)

Bài 10*. a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-5; 10)$; $\overrightarrow{AC} = (3; 6)$, $\overrightarrow{BC} = (8; -4)$.

Giả sử A, B, C thẳng hàng thì $\overrightarrow{AB}$ cùng phương $\overrightarrow{AC}$ (cùng giá).

Suy ra $\exists k \in R$ sao cho $\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{AC}$ (vì $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{0}$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5 = 3k \\ 10 = 6k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\dfrac{5}{3} \\ k = \dfrac{5}{3} \end{cases} \text{(vô nghiệm)}$$

Vậy không tồn tại k nên ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Chu vi của tam giác là:

$$C_{\Delta ABC} = \left(\sqrt{125} + \sqrt{73} + \sqrt{80}\right) \text{ (đvd)}$$

c) Gọi I là chân đường phân giác trong của $\triangle ABC$ xuất phát từ A

$$I\left(\frac{-5 + 3\sqrt{\dfrac{125}{73}}}{1 + \sqrt{\dfrac{125}{73}}}; \frac{6 - 2\sqrt{\dfrac{125}{73}}}{1 + \sqrt{\dfrac{125}{73}}}\right).$$

ÔN TẬP CHƯƠNG I

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Vectơ là một đoạn thẳng định hướng.

2. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng hướng v

có cùng độ dài, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$.

3. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy một điểm A tuỳ ý, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ v

$\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệ

$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.

4. Quy tắc ba điểm: Với ba điểm tùy ý M, N, P ta luôn có:

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$$

5. Quy tắc hình bình hành:

Nếu ABCD là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

6. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Ta gọi hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ l

$\vec{a} + (-\vec{b})$, kí hiệu $\vec{a} - \vec{b}$

Vậy $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

7. Quy tắc ba điểm (đối với phép trừ)

Với ba điểm O, A, B tùy ý ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

8. Cho số $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của số k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$ và có độ dài bằng $|k|\,|\vec{a}|$.

Ta quy ước $0.\vec{a} = \vec{0}$; $k.\vec{0} = \vec{0}$

9. Điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI} \end{array}\right. \quad \text{(M tuỳ ý)}$$

10. Điểm G là trọng tâm của ΔABC

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} \end{array}\right. \quad \text{(M tuỳ ý)}$$

11. Điều kiện cần và đủ để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) cùng phương là có một số k để $\vec{a} = k\vec{b}$.

12. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Khi đó mọi vectơ $\vec{x}$ đều phân tích được một cách duy nhất theo hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, nghĩa là có duy nhất cặp số h, k sao cho $\vec{x} = h\vec{a} + k\vec{b}$.

13. Trục toạ độ (hay gọi tắt là trục) là một đường thẳng trên đó đã xác định một điểm 0 gọi là điểm gốc và một vectơ đơn vị $\vec{e}$. Kí hiệu trục là $(0; \vec{e})$

14. Cho hai điểm A và B trên trục $(0; \vec{e})$. Khi đó có duy nhất số a sao cho $\overrightarrow{AB} = a.\vec{e}$. Ta gọi số a đó là độ dài đại số của vectơ $\overrightarrow{AB}$ đối với trục đã cho và kí hiệu $a = \overline{AB}$.

15. Hệ trục toạ độ $(0; \vec{e_1}; \vec{e_2})$ gồm hai trục $(0; \vec{e_1})$ và $(0; \vec{e_2})$ vuông góc với nhau. Điểm gốc O chung của hai trục gọi là gốc toạ độ. Trục $(0; \vec{e_1})$ được gọi là trục hoành, kí hiệu là Ox, trục $(0; \vec{e_2})$ được gọi là trục tung và kí hiệu là Oy. Hệ trục toạ độ $(0; \vec{e_1}; \vec{e_2})$ còn kí hiệu là Oxy.

16. Trong mặt phẳng Oxy cho một vectơ $\vec{u}$ tùy ý. Khi đó có duy nhất một cặp số $(u_1; u_2)$ sao cho $\vec{u} = u_1\vec{e_1} + u_2\vec{e_2}$. Ta gọi cặp số $(u_1; u_2)$ đó là toạ độ của vectơ $\vec{u}$ đối với hệ toạ độ Oxy và viết $\vec{u} = (u_1; u_2)$ hoặc $\vec{u} = (u_1; u_2)$.

17. a) $\vec{u} = (u_1; u_2) \Leftrightarrow \vec{u} = u_1\vec{e_1} + u_2\vec{e_2}$

b) Nếu $\vec{u} = (u_1; u_2)$; $\vec{u'}(u'_1; u_2)$ thì

$$\vec{u} = \vec{u'} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = u'_1 \\ u_2 = u'_2 \end{cases}$$

18. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho một điểm M tuỳ ý. Toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ đối với hệ trục Oxy được gọi là toạ độ của điểm M. Nếu $\overrightarrow{OM} = (x; y)$ thì ta nói điểm M có tọa độ (x; y) và viết M = (x; y) hoặc M(x; y). Số x gọi là hoành độ, số y gọi là tung độ của điểm M.

19. Nếu $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$.

20. Cho $\vec{u} = (u_1; u_2)$; $\vec{v} = (v_1; v_2)$. Khi đó:

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1; u_2 + v_2)$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1; u_2 - v_2)$$

$$k\vec{u} = (ku_1; ku_2)\ k \in R$$

21. Cho đoạn thẳng AB có $A(x_A; y_A)$; $B(x_B; y_B)$. Toạ độ trung điểm $I(x_I; y_I)$ của đoạn thẳng AB được tính theo công thức:

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

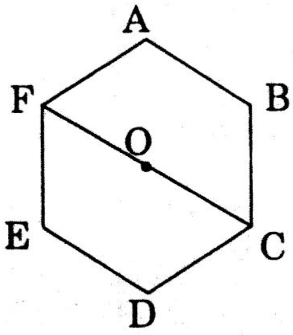
22. Cho tam giác ABC có $A(x_A; y_A)$; $B(x_B; y_B)$; $C(x_C; y_C)$. Khi đó toạ độ trọng tâm $G(x_G; y_G)$ của tam giác ABC được tính theo công thức:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$$

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Cho lục giác đều ABCDEF có tâm O. Hãy chỉ ra các vectơ bằng $\overrightarrow{AB}$ có điểm đầu và điểm cuối là 0 hoặc các đỉnh của lục giác.

Giải



Theo tính chất của lục giác đều thì:

$$\begin{cases} \overrightarrow{FO}; \overrightarrow{OC}; \overrightarrow{ED} \text{ cùng hướng } \overrightarrow{AB} \\ |\overrightarrow{FO}| = |\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{ED}| = |\overrightarrow{AB}| \end{cases}$$

Vậy các vectơ $\overrightarrow{FO}$; $\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{ED}$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Bài 2. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$, các khẳng định sau đây đúng hay sai.

a) Hai vectơ cùng hướng thì cùng phương;

b) Hai vectơ $\vec{b}$ và $k\vec{b}$ cùng phương;

c) Hai vectơ $\vec{a}$ và $(-2)\vec{a}$ cùng hướng;

e) Hai vectơ ngược hướng với vectơ thứ ba khác $\vec{0}$ thì cùng phương.

Giải

a) Đáp án (a) là đúng vì hai vectơ cùng phương thì mới xét quan hệ về hướng.

b) Đáp án (b) đúng vì theo định nghĩa phép nhân vectơ với một số thì $\vec{b}$ và $k\vec{b}$ cùng phương.

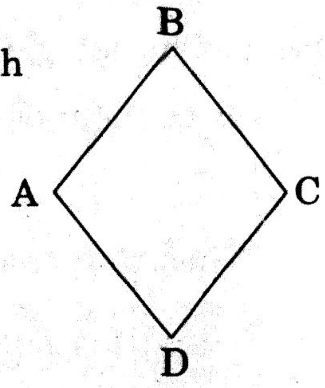
c) Khẳng định (c) là sai vì $(-2)\vec{a}$ ngược hướng với $\vec{a}$.

d) Khẳng định (d) đúng vì hai vectơ ngược hướng với vectơ thứ ba khác $\vec{0}$ thì chúng cùng hướng với nhau nên chúng cùng phương.

Tóm lại: Các khẳng định (a), (b) và (d) đúng, khẳng định (c) sai.

Bài 3. Tứ giác ABCD là hình gì? Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$

Giải



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow$ Tứ giác ABCD là hình bình hành

Mặt khác $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$.

Vậy tứ giác ABCD là hình thoi.

Bài 4. Chứng minh rằng $|\vec{a} + \vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$

Giải

Lấy điểm A bất kỳ, dựng $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$

Khi này:

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}| = AC,$$

$$|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| = AB + BC.$$

Với ba điểm A, B, C bất kỳ ta luôn có bất đẳng thức:

$AC \le AB + BC$ (dấu bằng xảy ra khi B nằm giữa A, C; hoặc B trùng A, hoặc B trùng C).

$\Leftrightarrow |\vec{a} + \vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$ (dấu bằng xảy ra $\vec{a}$ cùng hướng $\vec{b}$)

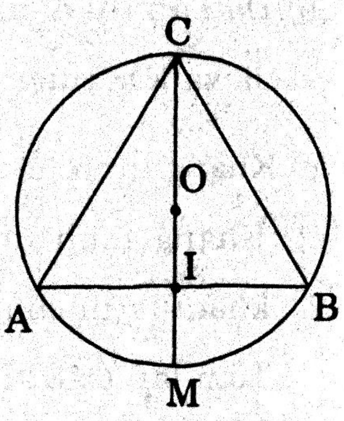
Bài 5. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Hãy xác định các điểm M, N, P sao cho:

a) $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$;

b) $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$;

c) $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}$.

Giải



a) Gọi I là trung điểm của AB.

Ta có: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$.

Do đó: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM}$ khi và chỉ khi:

$$\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OI} \text{ hay } \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IO} = \vec{0}$$

Suy ra M đối xứng với O qua I. (1)

Mặt khác ΔABC đều nên O là trọng tâm (2)

Từ (1) và (2) suy ra M thuộc đường tròn tâm O

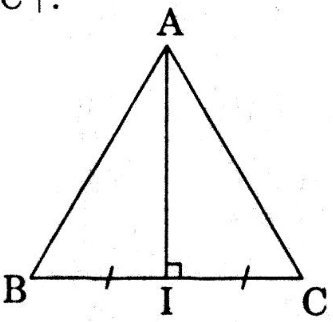
Hay M là giao điểm thứ hai của đường thẳng OC và đường tròn tâm O.

b) Tương tự N là giao điểm thứ hai của OA và đường tròn tâm O.

c) Tương tự P là giao điểm thứ hai của OB và đường tròn tâm O.

Bài 6. Cho tam giác đều ABC có cạnh a. Tính:

a) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$; b) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$.



Giải

a) Gọi I là trung điểm của BC

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2|\overrightarrow{AI}| = 2AI$$

Vậy $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2AI$

Mặt khác AI là đường cao của tam giác đều cạnh a

nên $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Suy ra: $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

b) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB}| = CB = a$

Vậy nên $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = a$

Bài 7. Cho sáu điểm M, N, P, Q, R, S bất kỳ. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{RQ}.$$

Giải

Ta có: $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QS}$

$= (\overrightarrow{MS} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{RQ}) + (\overrightarrow{SP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS})$

$= (\overrightarrow{MS} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{RQ}) + (\overrightarrow{SQ} + \overrightarrow{QS})$

$= \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{RQ}$

Vậy: $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{RQ}$.

Bài 8. Chứng minh rằng:

a) $\vec{a} - (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$;

b) $\vec{a} - (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Giải

a) Ta có:

$$\vec{a} - (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + (-1)(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + (-1)\vec{b} + (-1)\vec{c}$$

$$= \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$$

Vậy $\vec{a} - (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$

b) $$\vec{a} - (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} + (-1)[\vec{b} + (-1)\vec{c}]$$

$$= \vec{a} + (-1)\vec{b} + (-1)(-1)\vec{c}$$

$$= \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$$

Vậy $\vec{a} - (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Bài 9. Cho tam giác OAB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OA và OB. Tìm các số m, n sao cho:

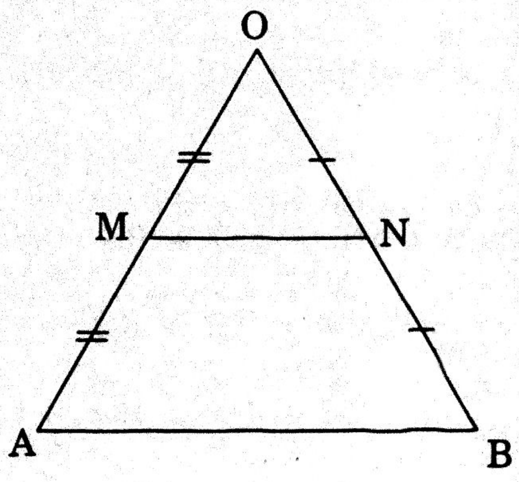
a) $\overrightarrow{OM} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$;

b) $\overrightarrow{AN} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$;

c) $\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$;

d) $\overrightarrow{MB} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$.

Giải



a) Ta có: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + 0.\overrightarrow{OB}$

Vậy $\begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ n = 0 \end{cases}$

b) $\overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{ON}$.

$\overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

Vậy $\begin{cases} m = -1 \\ n = \frac{1}{2} \end{cases}$

c) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}$

$$\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

$$\text{Vậy} \begin{cases} m = -\dfrac{1}{2} \\ n = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

d) $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}$

$$\overrightarrow{MB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

$$\text{Vậy} \begin{cases} m = -\dfrac{1}{2} \\ n = 1 \end{cases}$$

Bài 10. Chứng minh rằng nếu G và G′ lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và A′B′C′ bất kỳ thì: $3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$

Giải

Ta có:

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} =$$

$$= \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'C'}$$

$$= (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}) + (\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'}) + 3\overrightarrow{G'G'} = 3\overrightarrow{G'G'}$$

(Vì $\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'} = \vec{0}$ và

$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = -(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0})$)

Vậy: $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$

Bài 11. Trong mặt phẳng toạ độ, các khẳng định sau đúng hay sai?

a) Hai vectơ đối nhau thì chúng có hoành độ đối nhau.

b) Vectơ $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{e_1}$ nếu $\vec{a}$ có hoành độ bằng 0.

c) Vectơ $\vec{a}$ có hoành độ bằng 0 thì cùng phương với $\vec{e_2}$.

Giải

a) Giả sử $\vec{a}(x_1; y_1)$; $\vec{b}(x_2; y_2)$

$$\vec{a} = -\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ y_1 = -y_2 \end{cases}$$

Suy ra khẳng định (a) đúng.

b) Ta có: $\vec{e_1} = (1; 0)$, chọn $\vec{a} = (2; 0)$

Ta có: $\vec{a} = 2\vec{e_1}$, tức là $\vec{a}$ và $\vec{e_1}$ cùng phương

Mặt khác ta thấy hoành độ của vectơ $\vec{a}$ là $2 \neq 0$. Do đó khẳng định (b) là sai.

c) Giả sử $\vec{a} = (0; y)$ suy ra $\vec{a} = y\vec{e_2}$

Vậy nên $\vec{a}$ cùng phương $\vec{e_2}$ nên (c) đúng.

Tóm lại: Khẳng định (a) và (c) đúng, khẳng định (b) sai.

Bài 12. Cho $\vec{a}(2; 1)$, $\vec{b}(3; -4)$, $\vec{c}(-7; 2)$

a) Tìm toạ độ của $\vec{u} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - 4\vec{c}$;

b) Tìm toạ độ của $\vec{x}$ sao cho $\vec{x} + \vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$;

c) Tìm các số k và h sao cho $\vec{c} = k\vec{a} + h\vec{b}$.

Giải

a) Ta có: $\vec{u} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - 4\vec{c}$

$$\vec{u} = (6 + 6 + 28; 3 - 8 - 8) \Rightarrow \vec{u} = (40; -13).$$

b) $\vec{x} + \vec{a} = \vec{b} - \vec{c} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{b} - \vec{c} - \vec{a} \Leftrightarrow \vec{x} = (8; -7)$.

c) $\vec{c} = k\vec{a} + h\vec{b}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -7 = 2k + 3h \\ 2 = k - 4h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -2 \\ h = -1 \end{cases}$$

Bài 13. Cho $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{e_1} - 5\vec{e_2}$; $\vec{v} = m\vec{e_1} - 4\vec{e_2}$

Tìm m để $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.

Giải

Từ giả thiết ta có:

$$\vec{u} = \left(\frac{1}{2}; 5\right), \ \vec{v} = (m; -4)$$

Do $\vec{u} \neq \vec{0}$ nên $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương thì $\exists k \in R$ sao cho $\vec{v} = k\vec{u}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2}k \\ -4 = -5k \end{cases} \Rightarrow \frac{m}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{5} \Rightarrow m = \frac{2}{5}.$$

Vậy $m = \frac{2}{5}$ là giá trị cần tìm.

Bài 14. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là đúng.

a) Điểm A nằm trên trục hoành thì có hoành độ bằng 0.

b) P là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi hoành độ của P bằng trung bình cộng hoành độ của A và B.

c) Nếu tứ giác ABCD là hình bình hành thì trung bình cộng các toạ độ tương ứng của A và C bằng trung bình cộng các toạ độ tương ứng của B và D.

Giải

a) Khẳng định (a) là sai vì A (1; 0) ∈ Ox.

b) Khẳng định (b) là sai vì chỉ hoành độ bằng trung bình cộng của hai hoành độ là chưa đủ mà còn phải xét tung độ.

Ví dụ: A(1; 1), B(3; 3) thì P(2; 5) không là trung điểm của AB.

c) Khẳng định (c) là đúng, khi đó trung bình cộng toạ độ tương ứng của A và C bằng trung bình cộng toạ độ tương ứng của B và D và chính là toạ độ của tâm hình bình hành.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Cho tứ giác ABCD. Số các vectơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của tứ giác bằng:

a) 4; b) 6; c) 8; d) 12.

2. Cho lục giác đều ABCDEF có tâm O. Số các vectơ khác $\vec{0}$ cùng phương với $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của lục giác bằng:

a) 4; b) 6; c) 7; d) 8.

3. Cho lục giác đều ABCDEF có tâm O. Số các vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của lục giác bằng:

a) 2; b) 3; c) 4; d) 6.

4. Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 3, BC = 4. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AC}$ là:

a) 5; b) 6; c) 7; d) 9.

5. Cho ba điểm phân biệt A, B, C. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

a) $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}$; b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$;

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$; d) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$.

6. Cho hai điểm phân biệt A và B. Điều kiện để điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB là:

a) IA = IB; b) $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$;

c) $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$; d) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BI}$.

7. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. I là trung điểm của BC. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

a) $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GI}$; b) $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$;

c) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$; d) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}$.

8. Cho hình bình hành ABCD. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$; b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$;

c) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{CD}$; d) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD}$.

9. Cho hình bình hành OABC có O là gốc toạ độ, C nằm trên Ox. Khẳng định nào đúng?

a) $\overrightarrow{AB}$ có tung độ khác 0; b) A và B có tung độ khác nhau;

c) C có hoành độ bằng 0; d) $x_A + x_C - x_B = 0$.

10. Cho $\vec{u} = (3; -2)$, $\vec{v}(1; 6)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

a) $\vec{u} + \vec{v}$ và $\vec{a} = (-4; 4)$ ngược hướng;

b) $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương;

c) $\vec{u} - \vec{v}$ và $\vec{b} = (6; -24)$ cùng hướng;

d) $2\vec{u} + \vec{v}$ và $\vec{v}$ cùng phương.

11. Cho tam giác ABC có A(3; 5), B(1; 2), C(5; 2). Trọng tâm của tam giác ABC là:

a) $G_1(-3; 4)$; b) $G_2(4; 0)$;

c) $G_3(\sqrt{2}; 3)$; d) $G_4(3; 3)$.

12. Cho bốn điểm A(1; 1), B(2; –1), C(4; 3), D(3; 5). Chọn mệnh đề đúng:

a) Tứ giác ABCD là hình bình hành;

b) Điểm $G\left(2; \dfrac{5}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác BCD;

c) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$;

d) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ cùng phương.

13. Trong mặt phẳng Oxy cho bốn điểm A(–5; –2), B(–5; 3), C(3; 3), D(3; –2). Khẳng định nào sau đây là đúng.

a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng;

b) ABCD là hình chữ nhật;

c) Điểm I(–1; 1) là trung điểm AC;

d) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$.

14. Cho tam giác ABC. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Các cặp vectơ nào cùng phương?

a) $2\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{a} + 2\vec{b}$; b) $\vec{a} - 2\vec{b}$ và $2\vec{a} - \vec{b}$;

c) $5\vec{a} + \vec{b}$ và $-10\vec{a} - 2\vec{b}$; d) $\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{a} - \vec{b}$.

15. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình vuông ABCD có gốc O là tâm của hình vuông và các cạnh của nó song song với các trục tọa độ. Khẳng định nào sau đây là đúng?

a) $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = AB$; b) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{DC}$ cùng hướng;

c) $x_A = -x_C$ và $y_A = y_C$. d) $x_B = -x_C$ và $y_C = -y_B$.

16. Cho M(3; –4). Kẻ MM_1 vuông góc với Ox, MM_2 vuông góc với Oy. Khẳng định nào sau đây là đúng?

a) $\overline{OM_1} = -3$; b) $\overline{OM_2} = 4$;

c) $\overline{OM_1} - \overline{OM_2}$ có toạ độ (–3; –4); d) $\overline{OM_1} + \overline{OM_2}$ có toạ độ (3; – 4).

17. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho A(2; –3), B(4; 7). Toạ độ trun điểm I của đoạn thẳng AB là:

a) (6; 4); b) (2; 10); c) (3; 2); d) (8; –21).

18. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho A(5; 2), B(10; 8). Toạ độ của vect $\overrightarrow{AB}$ là:

a) (15; 10); b) (2; 4); c) (5; 6); d) (50; 16).

19. Cho tam giác ABC có B(9; 7), C(11; –1), M và N lần lượt là trun điểm của AB và AC. Toạ độ của vectơ $\overrightarrow{MN}$ là:

a) (2; –8); b) (1; –4); c) (10; 6); d) (5; 3).

20. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho bốn điểm: A(3; –2), B(7; 1 C(0; 1), D(–8; –5). Khẳng định nào sau đây là đúng?

a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ đối nhau;

b) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng phương nhưng ngược hướng;

c) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng phương và cùng hướng;

d) A, B, C, D thuộc cùng một đường thẳng.

21. Cho ba điểm A(–1; 5), B(5; 5), C(–1; 11). Khẳng định nào sau đây l đúng?

a) A, B, C thẳng hàng;

b) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương;

c) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương;

d) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương.

22. Cho $\vec{a}$ = (3; –4), $\vec{b}$ = (–1; 2). Toạ độ của vectơ $\vec{a} + \vec{b}$ là:

a) (–4; 6); b) (2; –2); c) (4; –6); d) (–3; –8).

23. Cho $\vec{a}$ = (–1; 2), $\vec{b}$(5; –7). Toạ độ của vectơ $\vec{a} - \vec{b}$ là:

a) (6; –9); b) (4; –5); c) (–6; 9); d) (–5; –14).

24. Cho $\vec{a}$ = (–5; 0), $\vec{b}$ = (4; x). Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương nếu số x là

a) –5; b) 4; c) 0; d) –1.

5. Cho $\vec{a} = (x; 2)$, $\vec{b} = (-5; 1)$, $\vec{a} = (x; 7)$. Vectơ $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ nếu:

a) $x = -15$; b) $x = 3$; c) $x = 15$; d) $x = 5$.

6. Cho A(1; 1), B(−2; −2), C(7; 7). Khẳng định nào đúng?

a) G(2; 2) là trọng tâm của tam giác ABC;

b) Điểm B ở giữa hai điểm A và C;

c) Điểm A ở giữa hai điểm B và C;

d) Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

7. Các điểm M(2; 3), N(0; −4), P(−1; 6) lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC. Toạ độ đỉnh A của tam giác là:

a) (1; 5); b) (−3; −1); c) (−2; −7); d) (1; −10).

8. Cho tam giác ABC có gốc toạ độ O là trọng tâm, A(−2; 2), B(3; 5). Toạ độ của đỉnh C là:

a) (−1; −7); b) (2; −2); c) (−3; −5); d) (1; 7).

9. Khẳng định nào trong các khẳng định sau là đúng?

a) Hai vectơ $\vec{a} = (-5; 0)$ và $\vec{b}(-4; 0)$ cùng hướng.

b) Vectơ $\vec{c} = (7; 3)$ là vectơ đối của $\vec{d} = (-7; 3)$.

c) Hai vectơ $\vec{u} = (4; 2)$ và $\vec{v} = (8; 3)$ cùng phương.

d) Hai vectơ $\vec{a} = (6; 3)$ và $\vec{b} = (2; 1)$ ngược hướng.

0. $\vec{e_1}$ và $\vec{e_2}$ là hai vectơ đơn vị của hệ trục $(O; \vec{e_1}; \vec{e_2})$. Toạ độ của vectơ $\vec{e_1} + \vec{e_2}$ là:

a) (0; 1); b) (−1; 1); c) (1; 0); d) (1; 1).

Giải

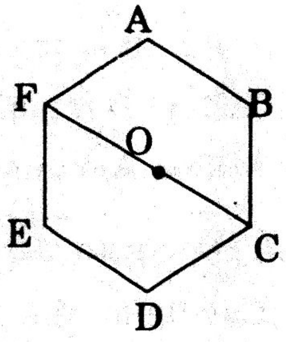
Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Đáp án	d	a	a	A	c	c	c	a	d	c	d	a	b	c	a
Câu	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Đáp án	d	c	c	b	b	c	b	c	c	c	c	b	a	a	d

1. Từ các đỉnh của tứ giác ABCD ta xác định được các vectơ có điểm đầ và điểm cuối là các đỉnh của tứ giác.

$$\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{BA};\ \overrightarrow{AD};\ \overrightarrow{DA};\ \overrightarrow{BC};\ \overrightarrow{CB};\ \overrightarrow{CD};\ \overrightarrow{DC};\ \overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{CA};\ \overrightarrow{BD};\ \overrightarrow{DB}$$

Vậy có 12 vectơ.

Suy ra đáp án (d) là đáp án đúng.

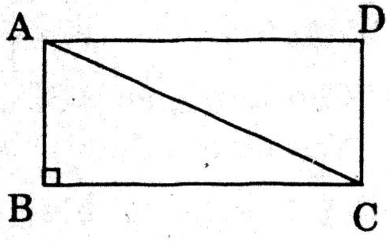


2. Những vectơ thoả mãn yêu cầu của bài toán đó là: $\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{BA};\ \overrightarrow{ED};\ \overrightarrow{DE}$

Vậy có bốn vectơ nên đáp án đúng là (a).

3. Các vectơ thoả mãn yêu cầu đầu bài đó là $\overrightarrow{BA};\ \overrightarrow{ED}$.

Vậy có hai vectơ, nên đáp án đúng là (a).



4. Xét Δ vuông BAC: $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

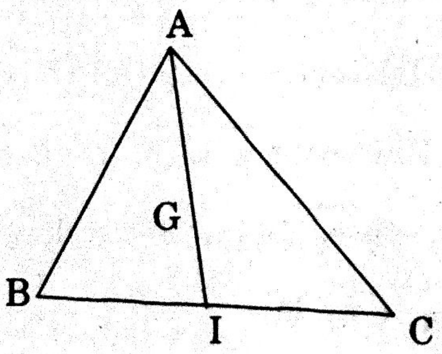
$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$$

$$AC = 5$$

Mặt khác: $|\overrightarrow{AC}| = AC = 5$ nên đáp án đúng là (a).

5. Với ba điểm A, B, C bất kỳ thì ta luôn có: $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$.

Vậy đáp án đúng là đáp án (c)



6. I là trung điểm của AB. Khi đó hai vectơ $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{IB}$ ngược hướng và cùng độ dài nên $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$.

Vậy đáp án đúng là đáp án (c).

7. Do I là trung điểm của BC nên:

$$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}.$$

Vậy đáp án đúng là đáp án (c).

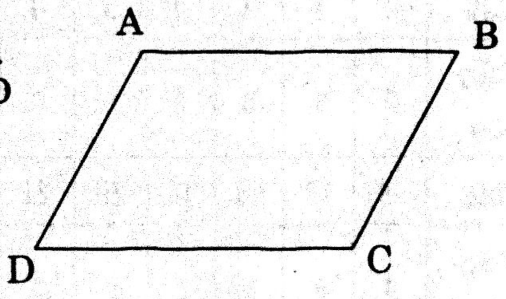
8. Ta luôn luôn có:

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$$

$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{BC}.$$

Do ABCD là hình bình hành nên

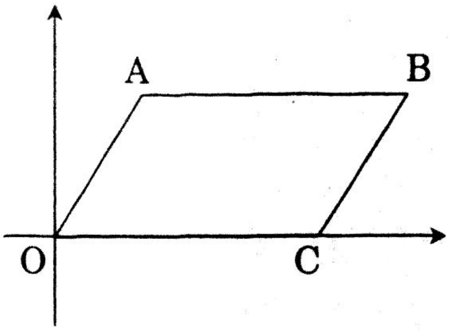
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}.$$



Vậy $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$

Tóm lại đáp án đúng là (a).

9. Do ABCD là hình bình hành nên:



$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}$$

Suy ra: $x_A + x_C = x_B$

$\Leftrightarrow \quad x_A + x_C - x_B = 0$

Vậy đáp án đúng là (d).

10. Ta có: $\vec{u} - \vec{v} = (3 - 1; -2 - 6)$

$\vec{u} - \vec{v} = (2; -8)$

Suy ra: $3(\vec{u} - \vec{v}) = (6; -24)$.

Nên $\vec{u} - \vec{v}$ và $\vec{b} = (6; -24)$ cùng hướng.

Vậy đáp án đúng là (c).

11. Gọi G(x; y) là trọng tâm ΔABC, khi đó:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = \dfrac{3 + 1 + 5}{3} = 3 \\ y = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = \dfrac{5 + 2 + 2}{3} = 3 \end{cases}$$

Vậy G(3; 3)

Do đó đáp án đúng là đáp án (d).

12. Từ giả thiết:

$$\overrightarrow{AB} = (1; -2);\ \overrightarrow{CD} = (-1; 2) \Rightarrow \overrightarrow{DC} = (1; -2)$$

Vậy $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (1)

Mặt khác: $\overrightarrow{BC} = (2; 4)$

Nên A, B, C không thẳng hàng (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác ABCD là hình bình hành.

Tóm lại đáp án đúng là đáp án (a).

13. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (0; 5)$, $\overrightarrow{BC} = (8; 0)$

Suy ra A, B, C không thẳng hàng. (1)

Mặt khác ta lại có: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0; 5) \\ \overrightarrow{DC} = (0; 5) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác ABCD là hình bình hành (*)

Mà: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{0^2 + 5^2} = 5$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{8^2 + 0^2} = 8$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{8^2 + 5^2} = \sqrt{89}$

Suy ra: $AB^2 + BC^2 = AC^2$. Vậy $\widehat{ABC} = 90^\circ$ (**)

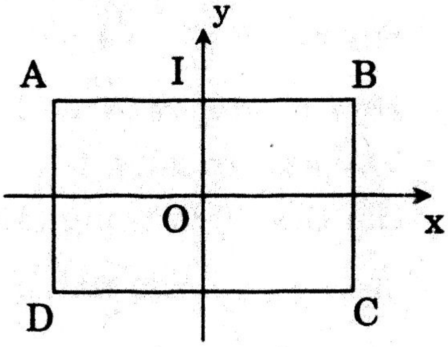
Từ (*) và (**) cho ta thấy tứ giác ABCD là hình chữ nhật.

Vậy đáp án đúng là (b).

14. Ta có: $-10\vec{a} - 2\vec{b} = -(5\vec{a} + \vec{b})$

Vậy đáp án đúng là đáp án (c).

15. Gọi I là trung điểm AB



Ta có: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$

$\Rightarrow \quad |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = 2|\overrightarrow{OI}| = 2OI$

$\Rightarrow \quad |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = BC = AB$

(Vì ABCD là hình vuông)

Vậy đáp án (a) là đúng.

16. Theo giả thiết: $\overrightarrow{M_2}(0; -4)$, $\overrightarrow{M_1}(3; 0)$.

Suy ra: $\overrightarrow{OM_2}(0; -4)$ và $\overrightarrow{OM_1}(3; 0)$.

Vậy $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = (0 + 3; -4 + 0) = (3; -4)$

$\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ có toạ độ là (3; –4).

Nên đáp án (d) là đáp án đúng.

17. Gọi I(x; y) là trung điểm của AB. Khi đó:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{2 + 4}{2} = 3 \\ y = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{-3 + 7}{2} = 2 \end{cases}$$

Vậy I(3; 2)

Nên đáp án đúng là (c).

18. Từ giả thiết: $\overrightarrow{AB}(10 - 5; 8 - 2)$ hay $\overrightarrow{AB} = (5; 6)$

Vậy đáp án đúng là (c).

19. Ta có: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(2; -8)$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{MN} = (1; -4)$

Vậy đáp án đúng là (b).

20. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (7 - 3; 1 - (-2)) \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = (4; 3)$

$\overrightarrow{CD} = (-8 - 0; -5 - 1) \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = (-8; -6)$

Vậy $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{CD}$. Từ đẳng thức này ta suy ra $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng phương nhưng ngược hướng.

Nên đáp án đúng là (b).

21. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (5 - (-1); 5 - 5) \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = (6; 0)$

$\overrightarrow{AC} = (-1 - (-1); 11 - 5) \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}(0; 6)$.

Suy ra không tồn tại $k \in R$ để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương.

Vậy đáp án (c) là đáp án đúng.

22. Theo giả thiết:

$\vec{a} + \vec{b} = (3 + (-1); -4 + 2)$

$\vec{a} + \vec{b} = (2; -2)$

Vậy đáp án đúng là (b).

23. Theo giả thiết:

$\vec{a} - \vec{b} = (-1 - 5; 2 - (-7))$

$\vec{a} - \vec{b} = (-6; 9)$

Vậy đáp án đúng là (c).

24. Do $\vec{a} = (-5; 0) \neq \vec{0}$ nên $\vec{b}$ cùng phương $\vec{a}$ thì $\exists k \in R$ để $\vec{b} = k\vec{a}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 = -5k \\ x = 0.k \end{cases}. \quad \text{Vậy } x = 0$$

Nên đáp án đúng là đáp án (c).

25. Ta có: $2\vec{a} = (2x; 4)$, $3\vec{b} = (-15; 3)$

Suy ra: $2\vec{a} + 3\vec{b} = (2x - 15; 7)$

Từ đẳng thức: $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x - 15 \\ 7 = 7 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 2x - 15 = x \qquad \Leftrightarrow \quad x = 15$

Vậy đáp án đúng là (c).

26. Theo giả thiết ta có: $\overrightarrow{BA} = (3; 3)$, $\overrightarrow{BC}(8; 8)$

Suy ra $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng hay A nằm giữa B và C (vì A không trùng B hoặc trùng C)

.Vậy đáp án đúng là (c).

27. Gọi $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$

Do giả thiết ta có:

$$\begin{cases} x_A + x_C = 2x_N \\ x_A + x_B = 2x_P \\ x_B + x_C = 2x_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_C = 0 \\ x_A + x_B = -2 \\ x_B + x_C = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = -3 \\ x_B = 1 \\ x_C = 3 \end{cases}$$

Tương tự:

$$\begin{cases} y_A + y_C = 2y_N \\ y_A + y_B = 2y_P \\ y_B + y_C = 2y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_A + y_C = -8 \\ y_A + y_B = 12 \\ y_B + y_C = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_A = -1 \\ y_B = 13 \\ y_C = -7 \end{cases}$$

Vậy $A(-3; -1)$

Nên đáp án đúng là (b).

28. Gọi $C(x_C; y_C)$. Khi đó theo tính chất trọng tâm:

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_0 = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \dfrac{-2 + 3 + x_C}{3} \\ 0 = \dfrac{2 + 5 + y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = -1 \\ y_C = -7 \end{cases}$$

Vậy $C(-1; -7)$ nên đáp án đúng là (a).

29. Với $\vec{a} = (-5; 0)$ và $\vec{b} = (-4; 0)$ thì dễ thấy.

$\vec{a} = \frac{5}{4}\vec{b}$ nên $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng

Vậy đáp án đúng là (a).

30. Theo giả thiết: $\vec{e_1}(1; 0)$ và $\vec{e_2}(0; 1)$

Khi này: $\vec{e_1} + \vec{e_2} = (1 + 0; 0 + 1)$

$\vec{e_1} + \vec{e_2} = (1; 1)$

Vậy đáp án (d) là đúng.

II. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

ài 15. Cho tam giác ABC. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ và $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

a) Gọi P là điểm đối xứng của B qua C. Tính $\overrightarrow{AP}$ theo $\vec{u}$ và $\vec{v}$;

b) Gọi Q và R là hai điểm định bởi:

$\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Tính $\overrightarrow{RP}$ và $\overrightarrow{RQ}$ theo $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

c) Suy ra P, Q, R thẳng hàng.

ài 16. Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng chỉ có một điểm M thỏa hệ thức:

$$2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}.$$

ài 17. Cho tứ giác ABCD

a) Xác định điểm O sao cho: $\overrightarrow{OB} + 4\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OD}$;

b) Tìm tập hợp các điểm M thỏa hệ thức:

$$|\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}| = |3\overrightarrow{MA}|.$$

ài 18. Trong mặt phẳng Oxy cho ba điểm A(1; –2), B(0; 4), C(3; 2). Tìm tọa độ điểm D biết:

a) $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$;

b) $\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{BD} - 4\overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

ài 19. Trong mặt phẳng Oxy cho ba điểm A(1; 0), B(–1; –5), C(–1; –2). Tìm tọa độ:

a) Các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$;

b) Điểm D sao cho ABCD là hình bình hành;

c) Tâm I của hình bình hành ABCD.

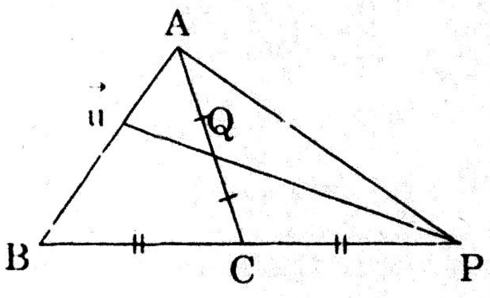
ài 20. Cho ba điểm A(–1; 1), B (0; 3), C (–4; –5).

a) Chứng minh A, B, C thẳng hàng. Tính $k = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$;

b) Tìm giao điểm của đường thẳng AB và trục x'Ox.

V. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

ài 15.



a) AC là trung tuyến tam giác ABP nên:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = 2\vec{v} - \vec{u}.$$

b) Ta có: $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AP}$

$$= \frac{1}{3}\vec{u} + 2\vec{v} - \vec{u} = \frac{2}{3}(3\vec{v} - 2\vec{u}) \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AQ} = -\frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} = \frac{1}{6}(3\vec{v} - 2\vec{u}) \qquad (2)$$

c) Từ (1) và (2) ta có: $\overrightarrow{RP} = 4\overrightarrow{RQ}$. Do đó $\overrightarrow{RP}$ và $\overrightarrow{RQ}$ cùng phương v cùng gốc R nên cùng giá. Vậy P, Q, R thẳng hàng.

Bài 16.

Ta có: $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \quad 2(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA}) + 3(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB}) - 5\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{DM} = 2\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{CB}$ không đổi

Điểm D cố định. Vậy chỉ có một điểm M thỏa hệ thức trên.

Bài 17.

a) Xác định O: $\overrightarrow{OB} + 4\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OD}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{BD} - 4\overrightarrow{BC}$

$= (2\overrightarrow{BD} - 2\overrightarrow{BC}) - 2\overrightarrow{BC}$

$= 2(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB})$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{OB} = 4\overrightarrow{CI}$ (I là trung điểm của BD)

$3\overrightarrow{BO} = 4\overrightarrow{IC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BO} = \frac{4}{3}\overrightarrow{IC}$

Vậy O là đỉnh của hình bình hành IBOE với $\overrightarrow{IE} = \frac{4}{3}\overrightarrow{IC}$.

b) Tập hợp các điểm M:

$|\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}| = |3\overrightarrow{MA}|$

$\Rightarrow |3\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} + 4\overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OD}| = |3\overrightarrow{MA}|$

Theo câu a) thì: $\overrightarrow{OB} + 4\overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OD} = \vec{0}$

nên $|3\overrightarrow{MO}| = |3\overrightarrow{MA}| \quad \Leftrightarrow \quad MO = MA$

Vậy tập hợp các điểm M là đường trung trực (d) của đoạn OA.

Bài 18. a) $D\begin{cases} x = -5 \\ y = 2 \end{cases}$

b) $D\begin{cases} x = 11 \\ y = 2 \end{cases}$

Bài 19. a) $\overrightarrow{AB} = (-1 - 1; 15 - 0) = (-2; -5);$

$\overrightarrow{BC} = (-1 + 1; -2 + 5) = (0; 3);$

$\overrightarrow{CA} = (1 + 1; 0 + 2) = (2; 2).$

b) $D(1; 3).$

c) $I(0; -1)$

Bài 20.

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1; 2)$ và $\overrightarrow{AC} = (-3; 6).$

Ta thấy $\frac{a_1}{b_1} = -\frac{1}{3}; \frac{a_2}{b_2} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$

Nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương và cùng gốc A.

Vậy A, B, C thẳng hàng và $k = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}} = -\frac{1}{3}.$

b) Gọi M là giao điểm của AB và x'Ox, ta có M(x; 0) và

$\overrightarrow{AM} = (x + 1; -1)$

A, B, M thẳng hàng $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng phương.

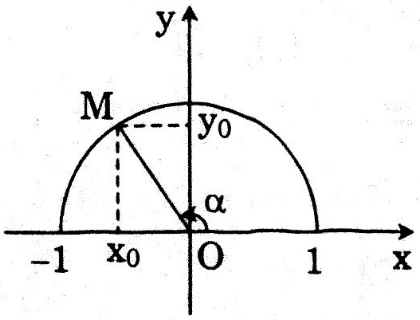
$\Leftrightarrow \frac{x + 1}{1} = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$. Vậy $M\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$.

CHƯƠNG II: TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ VÀ ỨNG DỤNG

§1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC α BẤT KÌ VỚI $0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa:



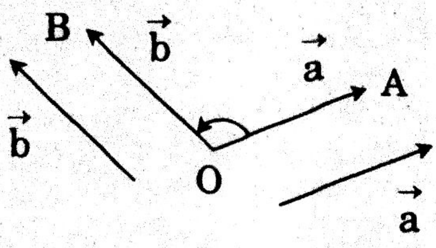
Với mỗi góc α ($0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$) ta xác định điểm M trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$ và giả sử M có tọa độ (x_0; y_0). Khi đó:

- Sin của góc α là y_0, kí hiệu: $\sin\alpha = y_0$.
- Cosin của góc α là x_0, kí hiệu: $\cos\alpha = x_0$.
- Tang của góc α là $\frac{y_0}{x_0}$ ($x_0 \ne 0$), kí hiệu: $\tan\alpha = \frac{y_0}{x_0}$.
- Cotang của góc α là $\frac{x_0}{y_0}$ ($y_0 \ne 0$), kí hiệu: $\cot\alpha = \frac{x_0}{y_0}$.

2. Tính chất: Với mỗi góc α ($0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$)

- $\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$
- $\cos\alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$
- $\tan\alpha = -\tan(180^\circ - \alpha)$ ($\alpha \ne 90^\circ$)
- $\cot\alpha = -\cot(180^\circ - \alpha)$ ($\alpha \ne 0^\circ$, $\alpha \ne 180^\circ$)

3. Góc giữa hai vectơ:



Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$.

Từ một điểm O bất kỳ ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

Góc $\widehat{AOB}$ với số đo từ 0° đến 180° được gọi là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Kí hiệu giữa góc hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $(\vec{a}; \vec{b})$.

Nếu $(\vec{a}\,;\vec{b}) = 90^\circ$ ta nói $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc nhau, ký hiệu là $\vec{a} \perp \vec{b}$ hoặc $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Chú ý: Trong hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ nếu có ít nhất một vectơ $\vec{0}$ thì ta xem góc giữa hai vectơ đó là không xác định.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có:

a) $\sin A = \sin(B + C)$ b) $\cos A = -\cos(B + C)$

Giải

a) Do A, B, C là ba góc của tam giác ABC nên:

$$A + B + C = 180^\circ \iff A = 180^\circ - (B + C)$$

Do vậy:

$$\sin A = \sin(180^\circ - (B + C)) = \sin(B + C)$$

b) Do $A = 180^\circ - (B + C)$

nên $\cos A = \cos(180^\circ - (B + C)) = -\cos(B + C)$

Bài 2. Cho AOB là tam giác cân tại O có OA = a và có các đường cao OH và AK. Giả sử $\widehat{AOH} = \alpha$. Xác định các góc $(\overrightarrow{AK}; \overrightarrow{AB})$, $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{OB})$.

Giải

* *Cách 1.*

Ta có do $\widehat{AOH} = \alpha \Rightarrow \widehat{OAB} = 2\alpha$.

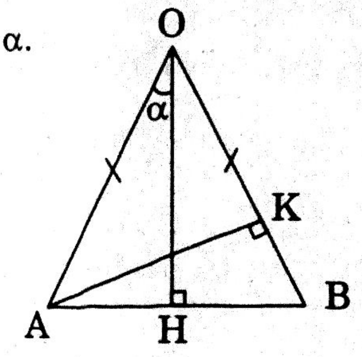
Mà tam giác AOB cân tại O do đó $\widehat{ABK} = 90^\circ - \alpha$.

Xét tam giác AKB ta có $\widehat{ABK} + \widehat{KAB} = 90^\circ$.

$\Rightarrow \widehat{KAB} = 90^\circ - \widehat{ABK} = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$.

Do vậy $(\overrightarrow{AK}; \overrightarrow{AB}) = \widehat{KAB} = \alpha$.

Do $\widehat{ABK} = 90^\circ - \alpha$ hay $\widehat{AOB} = 90^\circ - \alpha$.



* *Cách 2.*

Dễ thấy hai tam giác AKB và OHB là hai tam giác đồng dạng.

$\Rightarrow \widehat{KAB} = \widehat{HOB} = \widehat{HOA} = \alpha$

$\Rightarrow (\overrightarrow{AK}; \overrightarrow{AB}) = \widehat{KAB} = \alpha$.

Bài 3. Chứng minh rằng:

a) $\sin 100^\circ = \sin 80^\circ$ b) $\cos 170^\circ = -\cos 10^\circ$

c) $\cos 122^\circ = -\cos 58^\circ$

Giải

a) $100^\circ + 80^\circ = 180^\circ \Rightarrow \sin 100^\circ = \sin(180^\circ - 80^\circ) = \sin 80^\circ$.

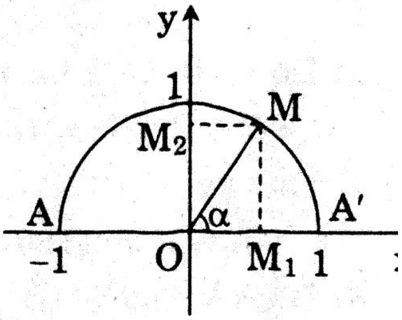
b) $170^\circ + 10^\circ = 180^\circ \Rightarrow \cos 170^\circ = \cos(180^\circ - 10^\circ) = -\cos 10^\circ$.

c) $122^\circ + 58^\circ = 180^\circ \Rightarrow \cos 122^\circ = \cos(180^\circ - 58^\circ) = -\cos 58^\circ$.

Bài 4. Chứng minh rằng với mọi góc α ($0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$) ta đều có:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Giải



Giả sử điểm M nằm trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$.

Gọi M_1, M_2 lần lượt là hình chiếu của M trên Ox, Oy. Khi đó, ta có:

$$\sin\alpha = \overline{OM_2} \text{ và } \cos\alpha = \overline{OM_1}$$

Bởi vậy: $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = OM_1^2 + OM_2^2 = OM^2 = 1$.

Vậy $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ (với $0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$).

Bài 5. Cho góc α, với $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P = 3\sin^2\alpha + \cos^2\alpha.$$

Giải

Theo bài 4, ta có: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

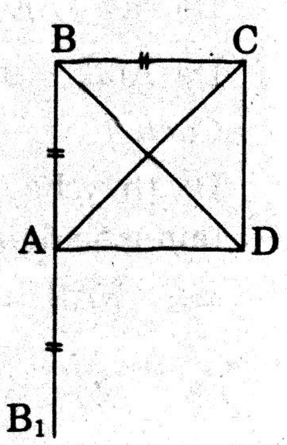
Mà $\cos\alpha = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{1}{9} \Rightarrow \sin^2\alpha = \dfrac{8}{9}$

Vậy $P = 3.\dfrac{8}{9} + \dfrac{1}{9} = \dfrac{25}{9}$.

Bài 6. Cho hình vuông ABCD. Tính:

$\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA})$; $\sin(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD})$; $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

Giải



Gọi B_1 là điểm đối xứng với B qua A.

$\Rightarrow (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB_1})$

Do ABCD là hình vuông.

$\Rightarrow \widehat{CAD} = 45^\circ$

$\Rightarrow \widehat{CAB_1} = 135^\circ$ hay $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB_1}) = 135^\circ$

Do vậy $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = \cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Do $AC \perp BD \Rightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$

$\Rightarrow \quad (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \sin(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = 1.$

Do AB // CD, mặt khác B và D nằm về hai phía của AC, suy ra $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ là hai vectơ ngược hướng.

$\Rightarrow \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = -1.$

II. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Bài 7. Chứng minh rằng với mọi góc α ($0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$) ta đều có:

a) Nếu $\cos\alpha \neq 0$ thì $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$.

b) Nếu $\sin\alpha \neq 0$ thì $1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = a, BC = 2a. Gọi H là hình chiếu của A lên BC. Tính $\cos(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AC})$, $\sin(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AH})$.

Bài 9. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $3 - \sin^2 90^\circ + 2\cos^2 60^\circ - 3\tan^2 45^\circ$.

b) $4a^2\sin^2 45^\circ + (2a\cos 45^\circ)^2 - 3(a\tan 45^\circ)^2$.

Bài 10. Đơn giản các biểu thức:

a) $\sin 10^\circ + \sin 170^\circ + \cos 15^\circ + \cos 165^\circ$.

b) $2\sin(180^\circ - x).\cot x - \cos(180^\circ - x).\tan x.\cot(180^\circ - x)$ với $0^\circ \le x \le 90^\circ$.

Bài 11*. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:

$A = \sin^4 x - \sin^2 x + \cos^2 x$ với $0^\circ \le x \le 180^\circ$.

V. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 7.

a) Với $\cos\alpha \neq 0$ thì $1 + \tan^2\alpha = 1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$.

b) Với $\sin\alpha \neq 0$ thì $1 + \cot^2\alpha = 1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

Bài 8.

* $\cos(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AC}) = \cos\widehat{HAC} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

* $\sin(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AH}) = \sin 150^\circ = \frac{1}{2}$.

Bài 9.

a) $3 - \sin^2 90^\circ + 2\cos^2 60^\circ - 3\tan^2 45^\circ = 3 - 1 + 2.\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3.1 = \frac{1}{2}$.

b) $4a^2\sin^2 45^\circ + (2a\cos 45^\circ)^2 - 3(a\tan 45^\circ)^2 =$

$= 4a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 4a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 3a^2.1 = a^2$.

Bài 10.

a) $\sin 10^\circ + \sin 170^\circ + \cos 15^\circ + \cos 165^\circ$

$= \sin 10^\circ + \sin 10^\circ + \cos 15^\circ - \cos 15^\circ = 2\sin 10^\circ + 0 = 2\sin 10^\circ$.

b) $2.\sin(180^\circ - x)\cot x - \cos(180^\circ - x).\tan x.\cot(180^\circ - x) =$

$= 2.\sin x.\cot x + \cos x.\tan x.(-\cot x) = 2\cos x - \cos x = \cos x$.

Bài 11.

$A = \sin^4 x - \sin^2 x + \cos^2 x = \sin^4 x - \sin^2 x + 1 - \sin^2 x = (\sin^2 x - 1)^2$.

* Ta có: $(\sin^2 x - 1)^2 \geq 0, \forall x \in [0^\circ, 180^\circ]$.

$\Rightarrow$ A đạt giá trị nhỏ nhất bằng 0 khi $\sin^2 x = 1 \Rightarrow x = 90^\circ$.

* $(\sin^2 x - 1)^2 \leq (-1)^2 = 1$

$\Rightarrow$ A đạt giá trị lớn nhất bằng 1 khi $\sin^2 x = 0 \Rightarrow x = 0$.

§2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa:

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a}.\vec{b}$, được xác định bởi công thức:

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a}, \vec{b})$$

Nhận xét

- Trường hợp ít nhất một trong hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng vectơ $\vec{0}$.

  Ta quy ước $\vec{a}.\vec{b} = 0$.

- Với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$ ta có:

  $\vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$, nghĩa là $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$.

- Khi $\vec{a} = \vec{b}$ tích vô hướng $\vec{a}.\vec{a}$ được kí hiệu là $\vec{a}^2$ và được gọi là bình phương vô hướng của vectơ $\vec{a}$.

2. Các tính chất:

Với mọi $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ và số thực k ta có:

- $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$ (tính chất giao hoán).
- $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$ (tính chất phân phối).
- $(k.\vec{a})\vec{b} = k.(\vec{a}.\vec{b}) = \vec{a}(k.\vec{b})$.
- $\vec{a}^2 \geq 0$, $\vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$.

3. Biểu thức toạ độ của tích vô hướng:

Trên mặt phẳng toạ độ $(0; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ cho hai vectơ $\vec{a}_1 = (a_1; a_2)$, $\vec{b}_1 = (b_1; b_2)$ khi đó $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.

Nhận xét: khi $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$ thì $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0$.

4. Ứng dụng:

a) Cho $\vec{a}_1 = (a_1; a_2)$ ta có: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

b) Góc giữa hai vectơ:

Cho $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$ ta có:

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{a_1.b_1 + a_2.b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

c) Khoảng cách giữa hai điểm:

Cho $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$. Khi đó: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

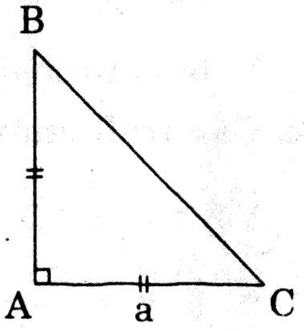
II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Cho tam giác vuông cân ABC có AB = AC = a. Tính các tích vô hướng của $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$.

Giải

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|.\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = a.a.\cos 90^\circ = 0.$

Ta có thể viết: Do tam giác ABC vuông cân tại A.



$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0.$

- Ta có: $\widehat{ACB} = 45^\circ$

$\Rightarrow \quad (\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}) = 180^\circ - \widehat{ACB} = 135^\circ$

Mà $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = a\sqrt{2}.$

Suy ra $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{AC}|.|\overrightarrow{CB}|.\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = a.a.\sqrt{2}.\cos 135^\circ = -a^2.$

Bài 2. Cho ba điểm O, A, B và biết OA = a, OB = b. Tính tích vô hướng của $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ trong hai trường hợp:

a) A và B cùng phía đối với O.

b) A và B khác phía đối với O.

Giải

a) A và B cùng phía đối với O $\Rightarrow (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 0^\circ$

Suy ra $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}|.|\overrightarrow{OB}|.\cos 0^\circ = a.b.$

b) A và B khác phía đối với O $\Rightarrow (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 180^\circ$

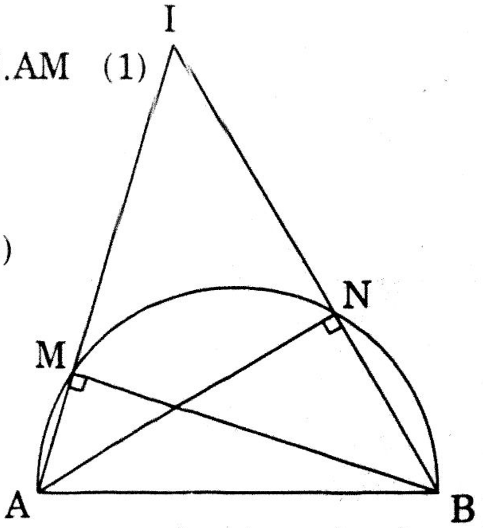
Suy ra $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = -|\overrightarrow{OA}|.|\overrightarrow{OB}|.\cos 180^\circ = -a.b.$

Bài 3. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R. Gọi M và N là hai điểm thuộc nửa đường tròn sao cho hai dây cung AM và BN cắt nhau tại I.

a) Chứng minh $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BA}$.

b) Hãy dùng câu a) để tính $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BN}$ theo R.

Giải



a) Ta có: $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AM} = |\overrightarrow{AI}|.|\overrightarrow{AM}|.\cos 0^\circ = AI.AM$ (1)

$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AI}|.|\overrightarrow{AB}|.\cos\widehat{IAB}$

$= AI.AB.\cos\widehat{IAB} = AI.AM$ (2)

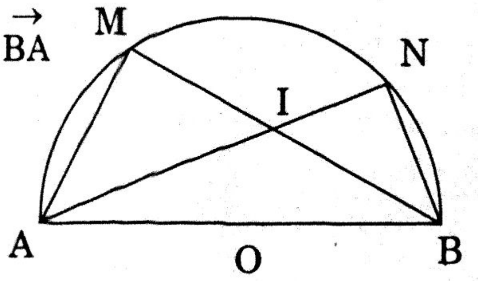
(Do tam giác AMB vuông tại M

$\Rightarrow$ $AM = AB.\cos\widehat{MAB}$)

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB}$.

Hoàn toàn chứng minh tương tự ta cũng được $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BA}$.

b) Ta có:



$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BA}$

$= \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{BI})$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2$

$= (2R)^2 = 4R^2$.

Bài 4. Trên mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm A(1; 3), B(4; 2).

a) Tìm tọa độ điểm D nằm trên trục Ox sao cho DA = DB.

b) Tính chu vi tam giác OAB.

c) Chứng tỏ OA vuông góc với AB và từ đó tính diện tích tam giác OAB.

Giải

a) Gọi toạ độ điểm D thuộc trục Ox là (x; 0).

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{DA} = (1 - x; 3)$, $\overrightarrow{DB} = (4 - x; 2)$.

Ta có: $DA = DB \Leftrightarrow |\overrightarrow{DA}| = |\overrightarrow{DB}|$

$\Leftrightarrow (1 - x^2) + 3^2 = (4 - x^2) + 2^2$

$\Leftrightarrow 6x = 10 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$

Vậy $D(\frac{5}{3}; 0)$ là điểm cần tìm.

b) Ta có: $OA = |\overrightarrow{OA}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

$OB = |\overrightarrow{OB}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$

$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(4-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{10}$

Suy ra chu vi tam giác OAB bằng:

$OA + OB + OC = 2\sqrt{10} + \sqrt{20}$ (đơn vị chu vi).

c) Do $\overrightarrow{OA} = (1; 3)$, $\overrightarrow{AB} = (3; -1)$.

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AB} = 1 \,.\, 3 + 3 \,.\, (-1) = 0 \Rightarrow OA \perp AB$

⇒ Diện tích tam giác OAB là:

$S_{OAB} = \frac{1}{2}.OA.AB = \frac{1}{2}.\sqrt{10}.\sqrt{10} = 5$ (đvdt).

Bài 5. Trên mặt phẳng Oxy hãy tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ trong các trường hợp sau:

a) $\vec{a} = (2; -3)$, $\vec{b} = (6; 4)$; b) $\vec{a} = (3; 2)$, $\vec{b} = (5; -1)$;

c) $\vec{a} = (-2; -2\sqrt{3})$, $\vec{b} = (3; \sqrt{3})$.

Giải

a) Ta có: $\vec{a}.\vec{b} = 2.6 + (-3).4 = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ hay $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$.

b) Ta có: $\vec{a}.\vec{b} = 3.5 + 2.(-1) = 13$.

Mặt khác:

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \sqrt{3^2 + 2^2}.\sqrt{5^2 + (-1)^2}.\cos(\vec{a}, \vec{b})$$

$$= \sqrt{26}.\sqrt{13}.\cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

Suy ra: $13 = \sqrt{26}.\sqrt{13}.\cos(\vec{a}, \vec{b}) \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$.

c) $\vec{a}.\vec{b} = -2.3 + (-2\sqrt{3}).\sqrt{3} = 12$.

Mặt khác:

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a}, \vec{b})$$

$$= \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2}\,.\sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2}\,.\cos(\vec{a}, \vec{b})$$

$$= \sqrt{20}\,.\sqrt{12}\,.\cos(\vec{a}, \vec{b})$$

$$\Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{12}{\sqrt{12}\,.\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{3}{5}} \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) \approx 39^\circ 15' 53''.$$

Bài 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho bốn điểm A(7; –3), B(8; 4), C(1; 5), D(0; –2). Chứng minh rằng tứ giác ABCD là hình vuông.

Giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1; 7)$, $\overrightarrow{AC} = (-6; 8)$, $\overrightarrow{AD} = (-7; 1)$.

Suy ra A, B, C, D không thẳng hàng hay A, B, C, D tạo thành một tứ giác.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1; 7)$, $\overrightarrow{CD} = (-1; -7)$ và $AB = CD = \sqrt{50}$.

Suy ra tứ giác ABCD có AB // CD và AB = CD.

Suy ra tứ giác ABCD là hình bình hành.

Mặt khác: $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{50} = |\overrightarrow{AD}| = AD$.

Nên tứ giác ABCD là hình thoi (1)

Ta lại có:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 1.(-7) + 7.1 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} \text{ hay } AB \perp AD \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra tứ giác ABCD là hình vuông.

Bài 7. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy cho điểm A(–2; 1). Gọi B là điểm đối xứng với A qua gốc tọa độ O. Tìm tọa độ điểm C có tung độ bằng 2 sao cho tam giác ABC vuông ở C.

Giải

Do B là điểm đối xứng của điểm A(–2; 1) qua gốc tọa độ O nên B(2; –1).

Gọi toạ độ điểm C(x; 2).

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{CA}(-2 - x; -1)$, $\overrightarrow{CB}(2 - x; -3)$.

Để tam giác ABC vuông tại C thì:

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow (-2 - x)(2 - x) + (-1)(-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 4 + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1$$

Vậy có hai điểm C(1; 2) và C(–1; 2) thỏa mãn.

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = a, BC = 2a. Dựa vào địn nghĩa của tích vô hướng hãy tính: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

Bài 9. Cho tam giác ABC với ba trung tuyến AD, BE, CF. Chứng min rằng: $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CF} = 0$.

Bài 10. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho các điểm A(1; 1), B(2; 4 C(10; –2). Chứng minh tam giác ABC vuông tại A. Tính tích v hướng $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ và tính cosB.

Bài 11. Tứ giác ABCD có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nha và cắt nhau tại M, P là trung điểm đoạn thẳng AD. Chứng min rằng: $MP \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$.

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 8. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$.

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} = -3a^2$.

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} = -a^2$.

Bài 9. Vì AD, BE, CF là các đường trung tuyến nên:

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC});\ \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC});\ \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CF} =$$

$$= \frac{1}{2}[\overrightarrow{BC}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{CA}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})]$$

$$= \frac{1}{2}[\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}]$$

$$= \frac{1}{2}[\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}]$$

$$= 0.$$

Bài 10. $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 10$

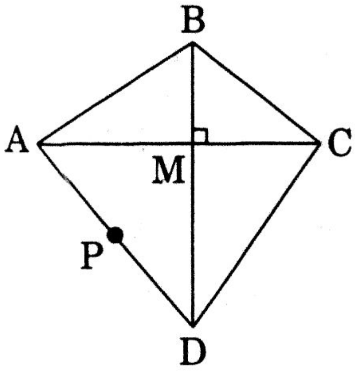
$$\cos B = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Bài 11. Ta có:

$$2\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}).(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB})$$

$$= \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$$

$$= \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MB}$$



(vì $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MC} = 0$ do $AC \perp BD$)

Như vậy ta có:

$$MP \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{BC} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$$

§3. CÁC HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VÀ GIẢI TAM GIÁC

. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định lí cosin:

Cho tam giác ABC với BC = a, CA = b, AB = c, ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$$

Từ đó ta suy ra được công thức sau:

Công thức tính độ dài trung tuyến.

Gọi m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài trung tuyến từ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC .

$$m_a^2 = \frac{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}{4}; \qquad m_b^2 = \frac{2\left(a^2 + c^2\right) - b^2}{4};$$

$$m_c^2 = \frac{2\left(a^2 + b^2\right) - c^2}{4}.$$

2. Định lý sin:

Cho tam giác ABC với BC = a, AC = b, AB = c và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

3. Công thức tính diện tích tam giác:

Cho tam giác ABC có BC = a, AC = b, AB = c. Gọi R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC. p là nửa chu vi tam giác, S là diện tích tam giác ABC, ta có:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B.$$

$$= \frac{abc}{4R}.$$

$$= pr.$$

$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Cho tam giác vuông ABC vuông tại A, $\widehat{B} = 58^\circ$ và cạnh a = 72 cm Tính $\widehat{C}$, cạnh b, cạnh c và đường cao h_a..

Giải

Ta có: $\widehat{C} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 180^\circ - (90^\circ + 58^\circ) = 32^\circ$.

Theo định lí sin, ta có: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

Do đó: $b = \frac{a\sin B}{\sin A} = \frac{72.\sin 58^\circ}{\sin 90^\circ} \approx \frac{72.0,8480}{1} \approx 61,06$ (cm).

$c = \frac{a\sin C}{\sin A} = \frac{72.\sin 38^\circ}{\sin 90^\circ} \approx \frac{72.0,5299}{1} \approx 38,15$ (cm).

Ta có: $S = \frac{1}{2}bc$ (do tam giác ABC vuông tại A)

$\approx \frac{1}{2}.61,06.38,15 \approx 1164,7195$ (cm^2).

Mặt khác: $S = \frac{1}{2}ah_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a}$

$\Rightarrow \quad h_a \approx \frac{2.1164,7195}{72} \approx 32,35$ (cm).

Bài 2. Cho tam giác ABC biết các cạnh a = 52,1cm; b = 85cm c = 54cm. Tính $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$.

Giải

Theo định lí cosin, suy ra:

- $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{85^2 + 54^2 - (52,1)^2}{2\,.\,85\,.\,54} \approx 0,8090$

  $\Rightarrow \widehat{A} \approx 36^\circ$.

- $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{(52,1)^2 + 54^2 - 85^2}{2\,.\,52,1\,.\,54} \approx -0,2834$

  $\Rightarrow \widehat{B} \approx 106^\circ 28'$.

Suy ra $\widehat{C} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 180^\circ - (36^\circ + 106^\circ 28') \approx 37^\circ 32'$.

Bài 3. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^\circ$, cạnh $b = 8$cm và $c = 5$cm. Tính cạnh a và các góc $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ của tam giác đó.

Giải

Theo định lí cosin, ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 8^2 + 5^2 - 2\,.\,8\,.\,5\,.\,\cos 120^\circ \approx 97$$

$\Rightarrow \quad a \approx 9,85$cm.

Theo định lí sin, ta có: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

Do đó $\sin B = \dfrac{b \sin A}{a} \approx \dfrac{8\,.\sin 120^\circ}{9,85} \approx 0,7034$

$\Rightarrow \quad \widehat{B} \approx 44^\circ 42'$.

$\Rightarrow \quad \widehat{C} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B}) \approx 15^\circ 18'$.

Bài 4. Tính diện tích tam giác có số đo các cạnh lần lượt là 7, 9 và 12.

Giải

Ta có: $p = \dfrac{7 + 9 + 12}{2} = 14$

Do đó diện tích S là:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$= \sqrt{14.(14-7)(14-9)(14-12)} = 31,3050 \text{ (đvdt)}$$

Bài 5. Tam giác ABC có góc $\widehat{A} = 120^\circ$. Tính cạnh BC cho biết cạnh $AC = m$ và cạnh $AB = n$.

Giải

Theo định lí cosin, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A$$

$$= m^2 + n^2 - 2m.n.\cos 120^\circ = m^2 + n^2 - m.n$$

Vậy $BC = \sqrt{m^2 + n^2 - 2m.n}$.

Bài 6. Tam giác ABC có các cạnh a = 8cm, b = 10cm và c = 13cm.

a) Tam giác đó có góc tù hay không ?

b) Tính độ dài trung tuyến MA của tam giác ABC đó.

Giải

a) Theo định lý cosin, ta có:

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ac} = \frac{8^2 + 10^2 - 13^2}{2.8.10} = -\frac{1}{16} < 0$$

$\Rightarrow C > 90^\circ$ hay tam giác ABC có góc C tù.

b) Ta có: $MA^2 = \dfrac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4}$

$$\Rightarrow \quad MA^2 = \frac{2(10^2 + 13^2) - 8^2}{4} = 118{,}5$$

$$\Rightarrow \quad MA \approx 10{,}89 \text{ (cm)}.$$

Bài 7. Tính góc lớn nhất của tam giác ABC biết:

a) Các cạnh a = 3cm, b = 4cm và c = 6cm.

b) Các cạnh a = 40cm, b = 13cm và c = 37cm.

Giải

a) Ta có: do 3 < 4 < 6 nên a < b < c.

$\Rightarrow \widehat{A} < \widehat{B} < \widehat{C}$

$$\Rightarrow \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{3^2 + 4^2 - 6^2}{2.3.4} \approx -0{,}3056$$

$\Rightarrow \widehat{C} \approx 107^\circ 47'$.

b) Do 13 < 37 < 40 nên b < c < a

$\Rightarrow \widehat{B} < \widehat{C} < \widehat{A}$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{13^2 + 37^2 - 40^2}{2.13.37} \approx -0{,}0644$$

$\Rightarrow \widehat{A} \approx 93^\circ 41'$.

Bài 8. Cho tam giác ABC biết cạnh a = 137,5cm; $\widehat{B} = 83^\circ$; $\widehat{C} = 57^\circ$.

Giải

Ta có: $\widehat{A} = 180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 180^\circ - (83^\circ + 57^\circ) = 40^\circ$.

Theo định lí hàm sin, ta có:

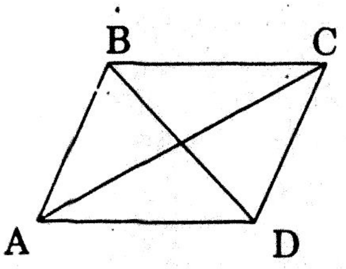
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Do đó: $b = \frac{a\sin B}{\sin A} = \frac{137,5.\sin 83^\circ}{\sin 40^\circ}$ xs 215,46 (cm).

$$c = \frac{a\sin C}{\sin A} = \frac{137,5.\sin 57^\circ}{\sin 40^\circ} \approx 179,40 \text{ (cm)}.$$

Bài 9. Cho hình bình hành ABCD có AB = a, BC = b, BD = m và AC = n. Chứng minh rằng $m^2 + n^2 = 2(a^2 + b^2)$.

Giải



Trong tam giác ABD ta có:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2.AB.AD.\cos\widehat{BAD}$$

$$\Leftrightarrow \quad m^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{BAD} \qquad (1)$$

Trong tam giác ABC ta có:

$$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA.BC.\cos\widehat{ABC}$$

$$\Leftrightarrow \quad n^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{ABC} \qquad (2)$$

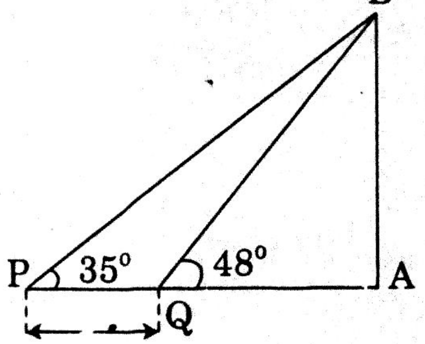
mà $\widehat{ABC} + \widehat{BAD} = 180^\circ$

$$\Rightarrow \quad \cos\widehat{ABC} = -\cos\widehat{BAD} \qquad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra: $m^2 + n^2 = 2(a^2 + b^2)$.

Bài 10. Hai chiếc tàu thuỷ P và Q cách nhau 300m. Từ P và Q thẳng hàng với chân A của tháp hải đăng AB ở trên bờ biển người ta nhìn chiều cao AB của tháp dưới góc $\widehat{BPA} = 35^\circ$ và $\widehat{BQA} = 48^\circ$. Tính chiều cao của tháp.

Giải



Xét tam giác PQB có:

$\widehat{P} = 35^\circ$, $\widehat{PQB} = 132^\circ$

$\Rightarrow \widehat{PBQ} = 180^\circ - (35^\circ + 132^\circ) = 13^\circ$

Theo định lý sin có:

$$\frac{QB}{\sin 35^\circ} = \frac{PQ}{\sin 13^\circ}$$

$$\Rightarrow BQ = \frac{PQ.\sin 35^\circ}{\sin 13^\circ} = \frac{300.\sin 35^\circ}{\sin 13^\circ} \approx 764{,}93\text{cm}.$$

Xét tam giác QBA ta có:

$$\widehat{QBA} = 180^\circ - (48^\circ + 90^\circ) = 42^\circ$$

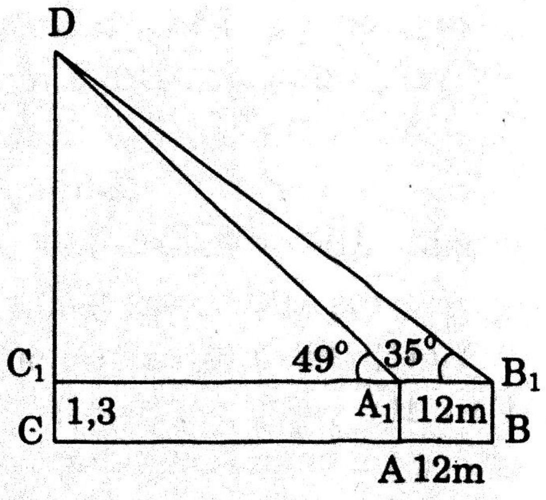
Theo định lý sin ta có:

$$\frac{AB}{\sin 48^\circ} = \frac{BQ}{\sin 90^\circ} \Rightarrow AB = \frac{BQ.\sin 48^\circ}{\sin 90^\circ} \approx \frac{764,93.\sin 48^\circ}{\sin 90^\circ}$$

Vậy AB ≈ 568,45 (m).

Bài 11. Muốn đo chiều cao của Tháp Chàm Por KLong Garai ở Nin Thuận người ta lấy hai điểm A và B trên mặt đất có khoảng các AB = 12m cùng nằm thẳng hàng với chân C của tháp để đặt hai gó kế. Chân của góc kế có chiều cao h = 1,3m. Gọi D là đỉnh tháp v hai điểm A_1, B_1 cùng thẳng hàng với C_1, thuộc chiều cao CD củ tháp. Người ta đo được $\widehat{DA_1C_1} = 49^\circ$ và $\widehat{DB_1C_1} = 35^\circ$. Tính chiều ca $CD = CC_1 + C_1D$ của tháp đó.

Giải



Ta có: $\widehat{DA_1C_1} = 49^\circ$

$\Rightarrow \widehat{DA_1B_1} = 131^\circ$

$\Rightarrow \widehat{A_1DB_1} = 180^\circ - (131^\circ + 35^\circ)$

$= 14^\circ$

- Xét tam giác DA_1B_1, theo định lí sin:

Ta có: $\dfrac{DA_1}{\sin \widehat{DB_1A_1}} = \dfrac{A_1B_1}{\sin \widehat{A_1DB_1}}$

$\Rightarrow DA_1 = \dfrac{12.\sin 35^\circ}{\sin 14^\circ} \approx 28{,}45$ (m)

Xét tam giác DC_1A_1 ta có:

$\widehat{C_1DA_1} = 90^\circ - 49^\circ = 41^\circ$

Theo định lí sin ta được:

$$\frac{DC_1}{\sin \widehat{DA_1C_1}} = \frac{DA_1}{\sin 90^\circ}$$

$$\Rightarrow DC_1 = \frac{DA_1.\sin \widehat{DA_1C_1}}{\sin 90^\circ} = \frac{28,45.\sin 49^\circ}{1} \approx 21{,}47 \text{ (m)}$$

Vậy chiều cao của tháp:

$CD = CC_1 + C_1D = 1{,}3 + 21{,}47 = 22{,}77$ (m).

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Bài 12. Cho tam giác ABC, có $b = 7$, $c = 5$ và $a = \frac{3}{5}$. Tính h_a và bán kính đường tròn ngoại tiếp R.

Bài 13. Tam giác ABC có $AB = 8$, $AC = 9$, $BC = 10$. Một điểm M nằm trên cạnh BC sao cho $BM = 7$. Tính độ dài đoạn thẳng AM.

Bài 14. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) Nếu $b + c = 2a$ thì $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$.

b) Nếu $bc = a^2$ thì $\sin A.\sin B = \sin^2 A$ và $h_b h_c = h_a^2$.

Bài 15*. Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có:

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}R$$

Bài 16. Chứng minh rằng hai trung tuyến kẻ từ B và C của tam giác vuông góc với nhau khi và chỉ khi có hệ thức sau:

$$\cot A = 2(\cot B + \cot C)$$

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 12. $R = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Bài 13. $AM = 3\sqrt{6,1}$.

Bài 14.

a) Theo công thức tính diện tích ta có:

$$a = \frac{2S}{h_a}; \quad b = \frac{2S}{h_b}; \quad c = \frac{2S}{h_c}.$$

Bởi vậy nếu $2a = b + c$ thì:

$$\frac{4S}{h_a} = \frac{2S}{h_b} + \frac{2S}{h_c} \text{ hay } \frac{2}{h_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}.$$

b) Từ $bc = a^2$ suy ra $2R.\sin B.2R.\sin C = (2R\sin A)^2$

Vậy $\sin B.\sin C = \sin^2 A$.

Từ $bc = a^2$ cũng suy ra $\frac{2S}{h_b}.\frac{2S}{h_c} = \left(\frac{2S}{h_a}\right)^2$

Vậy: $h_b h_c = h_a^2$.

Bài 15. Từ định lí cosin ta có:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \qquad \sin A = \frac{a}{2R}.$$

Suy ra: $\cot A = \dfrac{\cos A}{\sin A} = \dfrac{\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{\dfrac{a}{2R}} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{abc}R.$

Tương tự, ta có: $\cot B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{abc}R$; $\cot C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{abc}R.$

Ta có được: $\cot A + \cot B + \cot C = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}R.$

Bài 16. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.

Khi đó $GB \perp GC \Leftrightarrow a^2 = \dfrac{4}{9}\left(m_b^2 + m_c^2\right)$

$$\Leftrightarrow 9a^2 = 4\left(\frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} + \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}\right) \Leftrightarrow 5a^2 = b^2 + c^2$$

Đẳng thức $\cot A = 2(\cot B + \cot C)$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}R = 2\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{abc}R + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{abc}R\right) \text{ (theo bài 15)}$$

$$\Leftrightarrow b^2 + c^2 = 5a^2 \Leftrightarrow GB \perp GC.$$

ÔN TẬP CHƯƠNG II

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Giá trị lượng giác của một góc α bất kì với 0° ≤ α ≤ 180°

2. Tích vô hướng của hai vectơ

– Hai góc bù nhau có sin bằng nhau; còn cosin, tang, cotang của chúng đối nhau.

– Tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$ của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được tính bởi:

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a}, \vec{b})$$

– Các tính chất:

1. $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$

2. $(k\vec{a}).\vec{b} = k(\vec{a}.\vec{b})$

3. $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$

4. $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} . \vec{b} = 0$

5. $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$

– Nếu $\vec{a} = (x_1; y_1)$; $\vec{b} = (x_2; y_2)$ thì $\vec{a} . \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$.

3. Định lí cosin trong tam giác

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos C$$

4. Định lí sin trong tam giác

$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ (R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác).

5. Công thức trung tuyến

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}; \qquad m_b^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4};$$

$$m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}.$$

6. Công thức tính diện tích tam giác

$$S = \frac{1}{2}a\,h_a = \frac{1}{2}b\,h_b = \frac{1}{2}c\,h_c$$

$$= \frac{1}{2}a\,b\sin C = \frac{1}{2}b\,c\sin A = \frac{1}{2}a\,c\sin B$$

$$= \frac{abc}{4R}$$

$$= pr$$

$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{trong đó} \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$

II. BÀI TẬP CƠ BẢN

Bài 1. Hãy nhắc lại định nghĩa giá trị lượng giác của một góc α với 0° ≤ α ≤ 180°. Tại sao khi α là góc nhọn thì giá trị lượng giác này lại chính là các tỉ số lượng giác (đã được học ở lớp 9).

Bài 2. Tại sao hai góc bù nhau lại có sin bằng nhau và cosin đối nhau ?

Giải

Cho hai góc α và $180^\circ - \alpha$.

Gọi M và M′ lần lượt là hai điểm trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$ và $\widehat{xOM'} = 180^\circ - \alpha$.

⇒ M và M′ đối xứng nhau qua trục Oy.

⇒ Tung độ của hai điểm M và M′ bằng nhau còn hoành độ của hai điểm M và M′ thì đối nhau hay hai góc bù nhau có sin bằng nhau và cosin đối nhau.

Bài 3. Nhắc lại định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Tích vô hướng này với $|\vec{a}|$ và $|\vec{b}|$ không đổi đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất khi nào ?

Giải

- Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là:

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a}, \vec{b})$$

- Với $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ không đổi.

⇒ $\vec{a}.\vec{b}$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\cos(\vec{a}, \vec{b})$ lớn nhất

⇔ $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1$ ⇔ $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$ hay $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng phương.

$\vec{a}$ và $\vec{b}$ đạt giá trị nhỏ nhất ⇔ $\cos(\vec{a}, \vec{b})$ nhỏ nhất

⇔ $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -1$

⇔ $(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$

hay $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ ngược hướng.

Bài 4. Trong hệ tọa độ Oxy cho vectơ $\vec{a}(-3; 1)$ và vectơ $\vec{b}(2; 2)$, hãy tính tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$.

Giải

$$\vec{a}.\vec{b} = -3 . 2 + 1 . 2 = -4.$$

Bài 5. Hãy nhắc lại định lí cosin trong tam giác. Từ hệ thức này hãy tính cos A, cos B và cos C theo các cạnh của tam giác.

Giải

Cho tam giác ABC có AB = c, BC = a, AC = b. Khi đó:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos C.$$

Do đó:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};\ \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac};\ \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Bài 6. Từ hệ thức $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos A$ trong tam giác, hãy suy ra định lí Pitago.

Giải

Từ hệ thức $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

Nếu $\widehat{A} = 90^\circ \Rightarrow \cos A = 0$

$\Rightarrow$ $a^2 = b^2 + c^2$ (định lí Pitago)

Bài 7. Dựa vào định lí sin chứng minh rằng với mọi tam giác ABC, ta có $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$.

Giải

Từ định lí sin $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{\sin A} = 2R \\ \dfrac{b}{\sin B} = 2R \\ \dfrac{c}{\sin C} = 2R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2R\sin A \\ b = 2R\sin B \\ c = 2R\sin C \end{cases}$$

Bài 8. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) Góc A nhọn khi và chỉ khi $a^2 < b^2 + c^2$.

b) Góc A tù khi và chỉ khi $a^2 > b^2 + c^2$.

c) Góc A vuông khi và chỉ khi $a^2 = b^2 + c^2$.

Giải

Theo định lí cosin, ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos A$.

a) Góc A nhọn $\Rightarrow \cos A > 0 \Rightarrow 2\,b\,c\cos A > 0$

$\Rightarrow$ $b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos A < b^2 + c^2$ hay $a^2 < b^2 + c^2$

b) Góc A tù $\Rightarrow \cos A < 0 \Rightarrow 2\,b\,c\cos A < 0$

$\Rightarrow b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos A > b^2 + c^2$ hay $a^2 > b^2 + c^2$

c) Góc A vuông $\Rightarrow \cos A = 0 \Rightarrow 2\,b\,c\cos A = 0$

$\Rightarrow b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos A = b^2 + c^2$ hay $a^2 = b^2 + c^2$

Bài 9. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60°$, BC = 6. Tính bán kính đườn tròn ngoại tiếp tam giác đó.

Giải

Theo định lí sin, ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{6}{2\sin 60°} = 2\sqrt{3}.$$

Bài 10. Cho tam giác ABC có a = 12, b = 16, c = 20. Tính diện tích S củ tam giác, chiều cao h_a, các bán kính R, r của đường tròn ngoại tiếp, nộ tiếp tam giác và đường trung tuyến m_a của tam giác.

Giải

Ta có: $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{12+16+20}{2} = 24$, suy ra:

Diện tích S tam giác:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$= \sqrt{24(24-12)(24-16)(24-20)} = 96 \text{ (đơn vị diện tích)}$$

Ta lại có $S = \frac{1}{2} a\, h_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2.96}{12} = 16$

Ta có: $S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} = \frac{12.16.20}{4.96} = 10$

Mặt khác $S = p\,r$. Vậy $r = \frac{S}{p} = \frac{96}{24} = 4$.

Theo công thức trung tuyến:

$$m_a^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4} = \frac{2\left(16^2+20^2\right)-12^2}{4} = 292$$

Vậy $m_a \approx 17{,}09$.

Bài 11. Trong tập hợp các tam giác có hai cạnh a và b, tìm tam giác c diện tích lớn nhất.

Giải

Ta có: $S = \frac{1}{2}ab\sin C \Rightarrow$ S lớn nhất $\Leftrightarrow$ sinC lớn nhất

$\Leftrightarrow$ $\sin C = 1$ hay $C = 90^\circ$

Vậy trong tập tam giác có hai cạnh a và b, tam giác vuông tại C có diện tích lớn nhất.

Bài 12. Cho tam giác ABC có BC = a, CA = b, AB = c. Hãy tính các góc của tam giác đó.

Giải

Ta có :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac};$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Cho góc $\alpha = 150^\circ$. Trong các giá trị lượng giác sau đây của góc α, giá trị nào là đúng?

a) $\sin 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\cos 150^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ d) $\cot 150^\circ = \sqrt{3}$

2. Cho α và β là hai góc bù nhau. Trong các hệ thức sau đây, hệ thức nào sai?

a) $\sin\alpha = \sin\beta$ b) $\cos\alpha = -\cos\beta$

c) $\tan\alpha = -\tan\beta$ d) $\cot\alpha = \cot\beta$

3. Cho α và β là các góc tù trong đó $\alpha < \beta$. Điều khẳng định nào sau đây là đúng?

a) $\sin\alpha < \sin\beta$ b) $\cos\alpha < \cos\beta$

c) $\tan\alpha < 0$ d) $\cot\alpha > 0$

4. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào sai?

a) $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ$ b) $co45^\circ = \sin 135^\circ$

c) $\cos 30^\circ = \sin 120^\circ$ d) $\sin 60^\circ = \cos 120^\circ$

5. Cho hai góc nhọn α và β trong đó $\alpha < \beta$. Khẳng định nào sau đây là sai?

a) $\cos\alpha < \cos\beta$ b) $\sin\alpha < \sin\beta$

c) $\cos\alpha = \sin\beta \Leftrightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$ d) $\tan\alpha + \tan\beta > 0$

6. Tam giác ABC vuông ở A và có góc $\widehat{B} = 30^\circ$. Khẳng định nào sau đây là sai?

a) $\cos B = \frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\cos C = \frac{1}{2}$ d) $\sin B = \frac{1}{2}$

7. Tam giác đều ABC có đường cao AH. Khẳng định nào sau đây là đúng?

a) $\sin\widehat{BAH} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\cos\widehat{BAH} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

c) $\sin\widehat{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\sin\widehat{AHC} = \frac{1}{2}$

8. Điều khẳng định nào sau đây là đúng?

a) $\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$

b) $\cos\alpha = \cos(180^\circ - \alpha)$

c) $\tan 45^\circ = \tan 180^\circ$

d) Khi góc α tăng dần từ 0° đến 180° thì $\cos\alpha$ cũng tăng dần lên mãi.

9. Tìm khẳng định sai trong các khẳng định sau đây:

a) $\cos 35^\circ > \cos 10^\circ$ b) $\sin 60^\circ < \sin 80^\circ$

c) $\tan 45^\circ < \tan 60^\circ$ d) $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ$

10. Tam giác ABC vuông ở A và có góc $\widehat{B} = 50^\circ$. Khi đó ta có:

a) $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC}) = 130^\circ$ b) $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{AC}) = 40^\circ$

c) $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CB}) = 50^\circ$ d) $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{CB}) = 120^\circ$

Điều khẳng định nào trên đây là sai?

11. Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng và đều khác vectơ $\vec{0}$. Trong các kết quả sau đây, hãy chọn kết quả đúng.

a) $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$ b) $\vec{a}.\vec{b} = 0$

c) $\vec{a}.\vec{b} = 1$ d) $\vec{a}.\vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}|$

12. Tam giác ABC vuông cân tại A có AB = AC = 30cm. Hai đường trung tuyến BF và CE cắt nhau tại G. Diện tích tam giác GFC là một trong các kết quả sau:

a) $50cm^2$ b) $50\sqrt{2}\,cm^2$

c) $75cm^2$ d) $15\sqrt{105}\,cm^2$

13. Tam giác ABC vuông tại A có AB = 5cm, BC = 13cm. Gọi góc $\widehat{ABC} = \alpha$, $\widehat{ACB} = \beta$. Hãy chọn một trong các kết luận sau đây:

a) $\beta > \alpha$ b) $\beta < \alpha$

c) $\beta = \alpha$ d) Không so sánh được độ lớn hai góc.

14. Cho góc $\widehat{xOy} = 30°$. Gọi A và B là hai điểm di động lần lượt trên Ox và Oy sao cho AB = 1. Độ dài lớn nhất của đoạn OB bằng một trong các kết quả sau đây:

a) 1,5 b) $\sqrt{3}$ c) $2\sqrt{2}$ d) 2

15. Tam giác ABC có BC = a, CA = b, AB = c. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

a) Nếu $b^2 + c^2 - a^2 > 0$ thì góc A nhọn;

b) Nếu $b^2 + c^2 - a^2 > 0$ thì góc A tù;

c) Nếu $b^2 + c^2 - a^2 < 0$ thì góc A nhọn;

d) Nếu $b^2 + c^2 - a^2 < 0$ thì góc A vuông.

16. Đường tròn tâm O có bán kính R = 15cm. Gọi P là một điểm cách tâm O một khoảng PO = 9cm. Dây cung đi qua P và vuông góc với PO có độ dài là một trong các kết quả sau đây:

a) 22cm b) 23cm c) 24cm d) 25cm

17. Tam giác ABC có AB = 8cm, AC = 18cm và có diện tích bằng $64cm^2$. Góc A của tam giác có giá trị sinA lấy trong các giá trị nào sau đây?

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{3}{8}$ c) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{8}{9}$

18. Hai góc α và β phụ nhau nghĩa là $\beta + \alpha = 90°$. Khi đó ta có:

a) $\sin\alpha = -\cos\beta$ b) $\cos\alpha = \sin\beta$

c) $\tan\alpha = \cos\beta$ d) $\cot\alpha = \tan\beta$

Hệ thức nào trên đây là sai?

19. Bất đẳng thức nào dưới đây là đúng?

a) $\sin 90^\circ < \sin 150^\circ$ b) $\sin 90^\circ 15' < \sin 90^\circ 30'$

c) $\cos 90^\circ 30' > \cos 100^\circ$ d) $\cos 150^\circ > \cos 120^\circ$

20. Cho tam giác ABC vuông tại A. Khẳng định nào sau đây là sai?

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} < \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} < \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}$

c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} < \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ d) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} < \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB}$

21. Tam giác ABC có AB = 4cm, BC = 7cm, CA = 9cm. Giá trị cosA là một trong các kết quả nào sau đây:

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $-\frac{2}{3}$ d) $\frac{1}{2}$

22. Cho hai điểm A = (1; 2) và B (3; 4). Giá trị của $\overrightarrow{AB}^2$ là một trong các kết quả nào sau đây:

a) 4 b) $4\sqrt{2}$ c) $6\sqrt{2}$ d) 8

23. Cho hai vectơ $\vec{a} = (4; 3)$ và $\vec{b} = (1; 7)$. Góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một trong các giá trị sau đây:

a) 90° b) 60° c) 45° d) 30°

24. Cho hai điểm M(1; –2) và N(–3; 4). Khoảng cách giữa hai điểm M và N là một trong các kết quả sau đây:

a) 4 b) 6 c) $3\sqrt{6}$ d) $2\sqrt{13}$

25. Tam giác ABC có A = (–1; 1), B = (1; 3) và C = (1; –1). Trong các phát biểu sau đây, hãy chọn cách phát biểu đúng:

a) ABC là tam giác có ba cạnh bằng nhau;

b) ABC là tam giác có ba góc đều nhọn;

c) ABC là tam giác cân tại B (có BA = BC);

d) ABC là tam giác vuông cân tại A.

26. Tam giác ABC có A = (10; 5), B = (3; 2) và C = (6; –5). Hãy xét xem khẳng định nào sau đây là đúng?

a) ABC là tam giác đều;

b) ABC là tam giác vuông cân tại B;

c) ABC là tam giác vuông cân tại A;

d) ABC là tam giác có góc tù tại A.

27. Tam giác ABC vuông cân tại A và nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R. Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Khi đó ta có tỉ số $\frac{R}{r}$ bằng một trong các giá trị sau đây:

a) $1 + \sqrt{2}$ b) $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2} - 1}{2}$ d) $\frac{1 + \sqrt{2}}{2}$

28. Tam giác ABC có AB = 4cm, AC = 8cm và đường trung tuyến AM = 3cm. Khi đó cạnh BC của tam giác có độ dài là một trong các kết quả sau:

a) $2\sqrt{6}$ cm b) $2\sqrt{31}$ cm c) 9cm d) $(4 + 2\sqrt{13})$cm

29. Tam giác ABC có BC = a, CA = b, AB = c và có diện tích S. Nếu tăng cạnh BC lên 2 lần đồng thời tăng cạnh CA lên 3 lần và giữ nguyên độ lớn của góc C thì khi đó diện tích của tam giác mới được tạo nên sẽ là một trong các giá trị sau:

a) 2S b) 3S c) 4S d) 6S

30. Tam giác đều DEF có ba đỉnh D, E, F lần lượt nằm trên ba cạnh BC, CA, AB của tam giác đều ABC sao cho DE ⊥ BC. Khi đó tỉ số diện tích của tam giác DEF và tam giác ABC sẽ là một trong các giá trị sau:

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{1}{2}$

Giải

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Đáp án	c	d	c	d	a	a	c	a	a	d	a	c	b	d	a
Câu	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Đáp án	c	d	a	c	d	a	d	c	d	d	b	a	b	d	b

Câu 1. Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} \sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \\ \cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

⇒ Đáp án c là cần tìm.

Câu 2. Ta có: $\alpha + \beta = 180^\circ$

$$\left.\begin{array}{l}\sin\alpha = \sin(180^\circ - \beta) = \sin\beta \\ \cos\alpha = \cos(180^\circ - \beta) = -\cos\beta\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Đáp án d là cần tìm.}$$

Câu 3. Do α, β tù, $\alpha < \beta \Rightarrow \sin\alpha > \sin\beta > 0$ và $0 > \cos\alpha > \cos\beta$

$\Rightarrow$ **Đáp án c là cần tìm.**

Câu 4. Ta có: $\sin 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ$, $\sin 45^\circ = \sin 135^\circ$, $\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow$ **Đáp án d là cần tìm.**

Câu 5. Do $\alpha < \beta < 90^\circ \Rightarrow \begin{cases} 0 < \sin\alpha < \sin\beta \\ \cos\alpha > \cos\beta > 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ **Đáp án a là cần tìm.**

Câu 6. Do ABC vuông, $\widehat{B} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 60^\circ$

Mà $\cos B = \cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ **Đáp án a là cần tìm.**

Câu 7. Do tam giác ABC đều, AH là đường cao

$\Rightarrow \widehat{BAH} = 30^\circ$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $\widehat{AHC} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ **Đáp án c là cần tìm.**

Câu 8. Ta có α và $180^\circ - \alpha$ là bù nhau

$\Rightarrow \sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$, $\cos\alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$

$\Rightarrow$ **Đáp án a là cần tìm.**

Câu 9. $0^\circ < \alpha < \beta < 90^\circ$

$\Rightarrow \sin\alpha < \sin\beta$, $\cos\alpha > \cos\beta$, $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow$ **Đáp án a là cần tìm.**

Câu 10. Do tam giác ABC vuông tại A và $\widehat{B} = 50^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 40^\circ$

$\Rightarrow (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{CB}) + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{CB}) = 140^\circ \neq 120^\circ$

$\Rightarrow$ **Đáp án sai là d.**

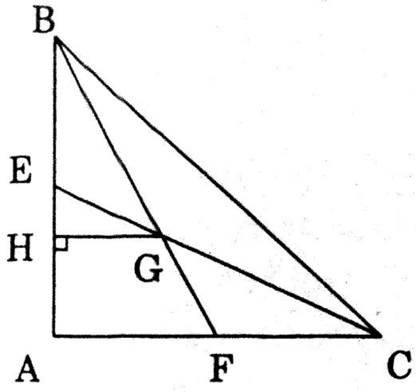
Câu 11. Do $\vec{a}$, $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng và khác $\vec{0}$

$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$

$\Rightarrow$ **Đáp án a là cần tìm.**

Câu 12. Ta có: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}.30.30 = 450\ (cm^2)$

Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ G là AB.



ΔAEC ∽ ΔHEG

$$\Rightarrow \frac{EG}{EC} = \frac{AG}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{HG}{30} = \frac{1}{3} \Rightarrow HG = 10cm$$

$$\Rightarrow \text{đường tròn}(\Delta EGB) = \frac{1}{2}.\frac{AB}{2}.GH$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{30}{2}.10 = 75cm^2$$

⇒ Đáp án c là cần tìm.

Câu 13. Do ΔABC vuông tại A và BC = 13cm, AB = 5cm

$\Rightarrow AC = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12cm$

$\Rightarrow AB < AC \Rightarrow \beta < \alpha$

Vậy đáp án c là cần tìm.

Câu 14. Đặt OB = x. Xét tam giác OAB, ta có: $\frac{AB}{\sin\widehat{AOB}} = \frac{OB}{\sin\widehat{OAB}}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sin 30^\circ} = \frac{x}{\sin A} \Rightarrow x = 2\sin A \le 2.$

Vậy OB lớn nhất bằng 2 khi $\widehat{A} = 90^\circ$. Vậy đáp án d là cần tìm.

Câu 15. Cho tam giác ABC, BC = a, AC = b, AB = c, theo định lí cosin:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Nếu $b^2 + c^2 - a^2 > 0 \Rightarrow \cos A > 0 \Rightarrow$ A nhọn.

Vậy đáp án a là cần tìm.

Câu 16. Gọi A, B là điểm mà đường thẳng qua P vuông góc với OP với đường tròn.

$\Rightarrow AB = 2AP = 2\sqrt{AO^2 - PO^2} = 2\sqrt{15^2 - 9^2} = 24$

Vậy đáp án c là cần tìm.

Câu 17. Ta có tam giác ABC là:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A$$

$$\Rightarrow \quad \sin A = \frac{2.S_{\Delta ABC}}{AB.AC} = \frac{2.64}{8.18} = \frac{8}{9}$$

Vậy đáp án d là cần tìm.

Câu 18. Do $\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow 0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $0^\circ < \beta < 90^\circ$

$\Rightarrow$ $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\beta$, $\cos\alpha$ cùng dấu dương.

$\Rightarrow$ $\sin\alpha = -\cos\beta$ là sai.

Vậy đáp án sai là a.

Câu 19. Ta có: với $90^\circ < \alpha, \beta < 180^\circ$ thì $\sin\alpha > \sin\beta$, $\cos\alpha > \cos\beta$

Vậy đáp án c là cần tìm.

Câu 20. Do tam giác ABC vuông tại A $\Rightarrow \widehat{B} < 90^\circ$, $\widehat{C} < 90^\circ$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|\cos\widehat{C} > 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = -|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{BA}|\cos\widehat{B} > 0$$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} < \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB}$ là sai.

Vậy đáp án d là cần tìm.

Câu 21. Theo định lý cosin, ta có:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2AC.AB} = \frac{9^2 + 4^2 - 7^2}{2.9.4}$$

$\Rightarrow \cos A = \dfrac{2}{3}$. Vậy đáp án a là cần tìm.

Câu 22. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2; 2) \Rightarrow \overrightarrow{AB}^2 = 2.2 + 2.2 = 8$

Vậy đáp án d là cần tìm.

Câu 23. Đáp án c là cần tìm.

Câu 24. Ta có: $\overrightarrow{MN} = (-4; 6)$

$$\Rightarrow MN = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(-4)^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

Vậy đáp án d là cần tìm.

Câu 25. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2; 2) \Rightarrow AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$

$$\overrightarrow{AC} = (2; -2) \Rightarrow AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$$

$$\overrightarrow{BC} = (0; -4) \Rightarrow BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = \sqrt{16}$$

$AB = AC \Rightarrow \Delta ABC$ cân.

Mặt khác: $AB^2 + AC^2 = 8 + 6 - 16 = BC^2$

$\Rightarrow$ Tam giác ABC vuông cân.

Vậy đáp án b là cần tìm.

Câu 26. Đáp án b là cần tìm.

Câu 27. Do tam giác vuông cân ABC tại A nội tiếp đường tròn bán kính R.

$\Rightarrow AB = AC = R\sqrt{2}$, $BC = 2R$ $\Rightarrow P = (1 + \sqrt{2})R$

Ta có: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = R^2 = pr$ $\Rightarrow \frac{R}{r} = 1 + \sqrt{2}$

Vậy đáp án a là cần tìm.

Câu 28. Ta có:

$$AM^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}$$

$$\Rightarrow BC^2 = 2(AB^2 + AC^2) - 4AM^2 = 2(4^2 + 8^2) - 4.3^2 = 124$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{124}$$

Vậy đáp án b là cần tìm.

Câu 29. Ta có:

$$S_{\Delta ABC} = S = \frac{1}{2}AC.CB.\sin C = \frac{1}{2}a.b.\sin C$$

Nếu tăng BC lên 2 lần, CA lên 3 lần và giữ nguyên góc C ta được tam giác mới A'B'C và

$$S_{\Delta A'B'C'} = \frac{1}{2}CA'.CB'\sin C = \frac{1}{2}.3b.2c.\sin C = 6.\ \frac{1}{2}.a.b.\sin C$$

$$\Rightarrow S_{\Delta A'B'C'} = 6S_{\Delta ABC}$$

Vậy đáp án d là cần tìm.

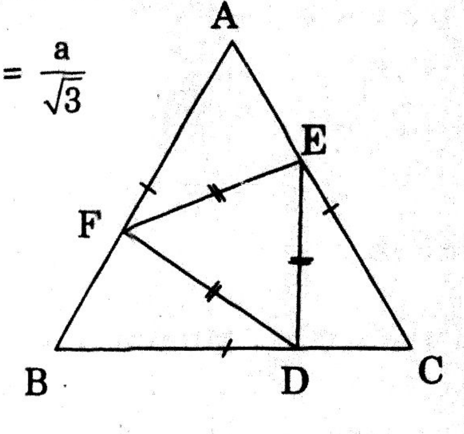
Câu 30. Do ΔABC đều mà $ED \perp BC$

$$\Rightarrow EC = 2DC = \frac{2}{3}AC$$

và ΔBFD, ΔFEA là các tam giác vuông tại F và E

$$\Rightarrow ED = \sqrt{EC^2 - DC^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}a\right)^2 - \left(\frac{1}{3}a\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{FD}{AC} = \frac{\frac{a}{\sqrt{3}}}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



Tỉ số diện tích của DEF và ABC là $\frac{1}{3}$.

Vậy đáp án b là cần tìm.

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Bài 13. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC:

$$b^2 - c^2 = a(b\cos C - c\cos B)$$

Bài 14. Tính diện tích tam giác ABC biết BC = a, $\widehat{A} = \alpha$ và hai trung tuyến BM, CN vuông góc với nhau.

Bài 15. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^\circ$, a = 10, $r = \frac{5\sqrt{3}}{3}$. Tính R, b, c.

Bài 16. Cho tam giác ABC. Tìm quỹ tích các điểm M sao cho:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

Bài 17. Cho hình thang vuông ABCD, đường cao AB = 2R, đáy lớn BC = 3a, đáy nhỏ AD = 2a.

a) Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$.

b) Gọi I là trung điểm của CD, tính $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BD}$. Suy ra góc của AI và BD.

Bài 18*. Cho tam giác ABC, G là trọng tâm. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0$.

b) $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MC^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$, với M là điểm tuỳ ý. Suy ra vị trí của điểm M để $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 13.

Theo định lí cosin: $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab.\cos C$, $a^2 + c^2 - b^2 = 2ac.\cos B$

Vậy $a(b.\cos C - c.\cos B) = b^2 - c^2$.

Bài 14. $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = a^2\tan\alpha$.

Bài 15. $R = \frac{10}{\sqrt{3}}$

$b = c = 10$.

Bài 16.

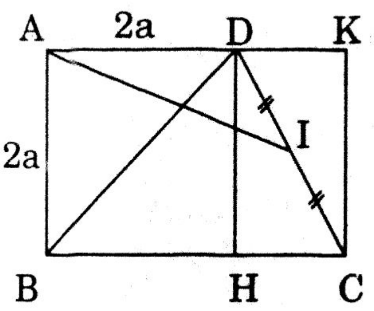
Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}) = 0$

Hay $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CM} = 0$.

Vậy M thay đổi sao cho CM ⊥ AB, suy ra quỹ tích M là đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB.

Bài 17.

a) Chiếu vectơ $\overrightarrow{CD}$ lên $\overrightarrow{AB}$ ta được $\overrightarrow{BA}$.



Do đó: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA} = -AB^2 = -4a^2$.

Chiếu vectơ $\overrightarrow{BD}$ lên $\overrightarrow{BC}$

ta được vectơ $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AD}$

Do đó: $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC} = 3a^2$

Khi đó:

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}$$

Mà $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD} = 3a^2$ và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA} = -4a^2$

Do đó: $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = -a^2$.

b) Thay $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$ và $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$

Ta có: $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB})$$

$$\text{Mà } \begin{cases} \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AD} = 3a^2 \\ \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = 4a^2 \\ AD^2 = a^2 \\ \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} = 0 \text{ vì } \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AB} \end{cases}$$

Do đó: $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BD} = 0$

Suy ra góc của AI và BD là 90°.

Bài 18*.

a) Ta có: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$

$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}$

$\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$

Cộng vế với vế ba đẳng thức trên ta được điều phải chứng minh.

b) Ta có:

$$MA^2 = \overrightarrow{MA}^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 = MG^2 + GA^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}$$

$$MB^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 = MG^2 + GB^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}$$

$$MC^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 = MG^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC}$$

Cộng vế với vế ba đẳng thức trên ta được:

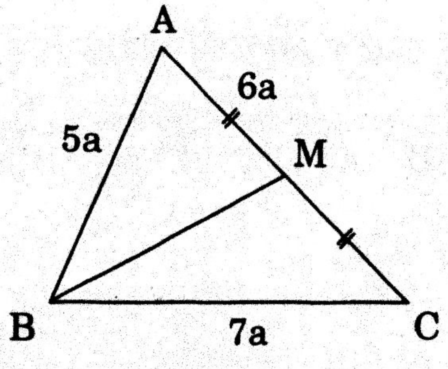
$$MA^2 + MB^2 + MC^2 =$$

$$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$$

Vì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$

Do vậy: $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$ (1)

Theo (1) tổng: $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất kh $MG = 0$ tức $M \equiv G$.



CHƯƠNG III: PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

§1. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng

Định nghĩa: Vectơ $\vec{u} \neq 0$ được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ nếu $\vec{u}$ khác $\vec{0}$ và giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với Δ.

2. Phương trình tham số của đường thẳng

a) Phương trình tham số của đường thẳng Δ qua $M_0(x_0, y_0)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}(u_1; u_2)$ là $\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases}$ $(u_1^2 + u_2^2 \neq 0)$

b) Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ qua $M_0(x_0; y_0)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}(u_1; u_2)$:

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} \quad (u_1^2 + u_2^2 \neq 0)$$

3. Vectơ pháp tuyến của đường thẳng

Định nghĩa: Vectơ $\vec{u}$ được gọi là vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và $\vec{u}$ vuông góc với vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ.

4. Phương trình tổng quát của đường thẳng

Phương trình đường thẳng qua $M_0(x_0; y_0)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{u}(a; b)$ là: $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$, nếu đặt $c = -ax_0 - by_0$ thì phương trình: $ax + by + c = 0$ gọi là phương trình tổng quát của đường thẳng đó.

5. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho Δ_1: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và Δ_2: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

Toạ độ giao điểm (nếu có) của Δ_1, Δ_2 là nghiệm hệ

$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$ (I) từ đó ta có kết quả sau:

– Hệ (I) có một nghiệm $\Leftrightarrow$ Δ_1 cắt Δ_2.

– Hệ (I) vô nghiệm ⇔ $\Delta_1 // \Delta_2$.

– Hệ (I) có vô số nghiệm ⇔ $\Delta_1 \equiv \Delta_2$.

6. Góc giữa hai đường thẳng

Cho Δ_1: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, Δ_2: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ đặt $\varphi = (\Delta_1, \Delta_2)$ ta có:

$$\cos\varphi = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} - \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

7. Công thức tính khoảng cách

Cho Δ: $ax + by + c = 0$ và $M_0(x_0; y_0)$ ta có:

$$d(M_0; \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Lập phương trình tham số và phương trình chính tắc của đườn thẳng d trong mỗi trường hợp sau:

a) d đi qua điểm M (2; 1) và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(3; 4)$.

b) d đi qua điểm M (–2; 3) và có vectơ pháp tuyến là $\vec{u}(5; 1)$.

Giải

a) Phương trình tham số d qua M(2, 1) có vectơ chỉ phương $\vec{u}(3; 4)$ là $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 4t \end{cases}$, phương trình chính tắc d là $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{4}$.

b) Do d qua M(–2; 3) và có một vectơ pháp tuyến $\vec{u}(5; 1)$

Vậy d: $5(x + 2) + (y - 3) = 0$ hay d: $5x + y + 7 = 0$

Bài 2. Lập phương trình tổng quát của đường thẳng Δ trong mỗi trườn hợp sau:

a) Δ đi qua M(–5; –8) và có hệ số góc k = –3.

b) Δ đi qua hai điểm A (2; 1) và B (–4; 5).

Giải

a) Đường thẳng Δ qua M(–5; –8) và có hệ số góc k = –3 có phươn trình: $y = -3(x + 5) - 8$ hay Δ: $-3x - y - 23 = 0$.

b) Ta có $\overrightarrow{AB}(-6; 4)$ là vectơ chỉ phương của Δ

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{u}(2; 3)$ là một vectơ pháp tuyến của Δ

$\Rightarrow$ Δ: $2(x - 2) + 3(y - 1) = 0$ hay Δ: $2x + 3y - 7 = 0$.

Bài 3. Cho tam giác ABC, biết A(1; 4), B(3; –1) và C(6; 2).

a) Lập phương trình tổng quát của đường thẳng AB, BC và AC.

b) Lập phương trình tham số của đường cao AH và trung tuyến AM.

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB}(2; -5)$ suy ra $\overrightarrow{u}(5; 2)$ là một vectơ pháp tuyến của (AB)

$\Rightarrow$ (AB): $5(x - 1) + 2(y - 4) = 0$

hay (AB): $5x + 2y - 13 = 0$.

Tương tự ta tìm được (BC): $x - y - 4 = 0$,

(AC): $2x + 5y - 22 = 0$.

b) Đường cao (AH) của tam giác ABC nhận $\overrightarrow{BC}(3; 3)$ làm vectơ pháp tuyến $\Rightarrow$ (AH) nhận $\overrightarrow{u}(-1; 1)$ làm vectơ chỉ phương

$$\Rightarrow \quad (AH): \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 4 + t \end{cases}$$

Bài 4. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua điểm M(4; 0) và N(0; –1).

Giải

Ta có $\overrightarrow{MN}(-4; -1)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng (MN)

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{n}(1; -4)$ là một vectơ pháp tuyến của (MN)

$\Rightarrow$ (MN): $1(x - 4) - 4(y - 0) = 0$

hay (MN): $x - 4y - 4 = 0$

Bài 5. Xét vị trí tương đối của các đường thẳng sau:

a) d_1: $4x - 10y + 1 = 0$ và d_2: $x + y + 2 = 0$

b) d_1: $12x - 6y + 10 = 0$ và d_2: $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$

c) d_1: $8x + 10y - 12 = 0$ và d_2: $\begin{cases} x = -6 + 5t \\ y = 6 - 4t \end{cases}$.

Giải

a) Toạ độ giao điểm d_1, d_2 (nếu có) là nghiệm hệ:

$$\begin{cases}4x - 10y + 1 = 0\\ x + y + 2 = 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x - 10(-x - 2) + 1 = 0\\ y = -x - 2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x = -\dfrac{3}{2}\\ y = -\dfrac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow \quad d_1 \text{ cắt } d_2 \text{ tại } \left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$$

b) Toạ độ giao điểm (nếu có) d_1, d_2 là nghiệm hệ: $\begin{cases}12x - 6y + 10 = 0\\ x = 5 + t\\ y = 3 + 2t\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}12(5 + t) - 6(3 + 2t) + 10 = 0\\ x = 5 + t\\ y = 3 + 2t\end{cases} \Rightarrow \text{Hệ vô nghiệm.}$$

Vậy $d_1 // d_2$

c) Toạ độ giao điểm (nếu có) d_1 ,d_2 là nghiệm hệ: $\begin{cases}8x + 10y - 12 = 0\\ x = -6t + 5t\\ y = 6 - 4t\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}8(-6 + 5t) + 10(6 - 4t) - 12 = 0\\ x = -6 + 5t\\ y = 6 - 4t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t \in R\\ x = -6 + 5t \text{ (Hệ có VSN).}\\ y = 6 - 4t\end{cases}$$

Suy ra $d_1 \equiv d_2$

Bài 6. Cho đường thẳng d: $\begin{cases}x = 2 + 2t\\ y = 3 + t\end{cases}$, tìm điểm M ∈ d và cách điểm A(0;1) một khoảng bằng 5.

Giải

Do M ∈ d ⇒ M(2 + 2t; 3 + t)

$$\Rightarrow \quad MA = \sqrt{(2 + 2t - 0)^2 + (1 - 3 - t)^2}$$

$$= \sqrt{4 + 8t + 4t^2 + 4 + 4t^2 + t^2} = \sqrt{5t^2 + 12t + 8}$$

Theo bài ra ta có MA = 5 nên ta có:

$$\sqrt{5t^2 + 12t + 8} = 5 \Leftrightarrow 5t^2 + 12t + 8 = 25$$

$$\Leftrightarrow \quad 5t^2 + 12t - 17 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t = 1\\ t = -\dfrac{17}{5}\end{array}\right.$$

$t = 1 \qquad \Rightarrow M(4;\ 4)$

$t = -\dfrac{17}{5} \qquad \Rightarrow M\left(-\dfrac{24}{5};\ -\dfrac{2}{5}\right)$

Bài 7. Tìm số đo của góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình d_1: $4x - 2y + 6 = 0$ và d_2: $x - 3y + 1 = 0$

Giải

Gọi φ là góc giữa d_1, d_2 ta có:

$$\cos\varphi = \frac{|4.1 + (-2).(-3)|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2}.\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$$

Bài 8. Tìm khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng trong các trường hợp sau:

a) $A(3;\ 5)$; $\quad\Delta$: $4x + 3y + 1 = 0$

b) $B(1;\ -2)$; $\quad d$: $3x - 4y - 26 = 0$

c) $C(1;\ 2)$; $\quad m$: $3x + 4y - 11 = 0$

Giải

$$\text{a) } d(A;\ \Delta) = -\frac{|4.3 + 3.5 + 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|28|}{\sqrt{25}} = \frac{28}{5}$$

$$\text{b) } d(B;\ d) = \frac{|3.1 - 4(-2) - 26|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-15|}{5} = 3$$

$$\text{c) } d(C,\ m) = \frac{|3.1 + 4.2 - 11|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0.$$

Chú ý: Điểm $C\ (1;\ 2) \in m$ vậy khoảng cách cần tìm bằng 0.

Bài 9. Tìm bán kính của đường tròn tâm $C(-2;\ -2)$ và tiếp xúc với đường thẳng Δ: $5x + 12y - 10 = 0$

Giải

Đường tròn tâm $C\ (-2;\ 2)$ tiếp xúc với Δ có bán kính:

$$R = d(C;\ \Delta) = \frac{|5(-2) + 12(-2) - 10|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{|-44|}{13} = \frac{44}{13}$$

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Bài 10. Cho ΔABC với $A(-2;\ 1)$, $B(4;\ 3)$ và $C(2;\ -3)$.

a) Viết phương trình tổng quát của (BC).

b) Viết phương trình tham số của trung tuyến AM của ΔABC.

Bài 11. Cho ΔABC có đỉnh A(2; 2).

a) Lập phương trình các cạnh của tam giác biết các đường cao kẻ từ B và C lần lượt có phương trình: $9x - 3y - 4 = 0$ và $x + y - 2 = 0$.

b) Lập phương trình đường thẳng qua A và vuông góc với AC.

Bài 12. Cho Δ_1: $x + y - 2 = 0$ và Δ_2: $x + my + 1 = 0$ (m là tham số). Tuỳ theo m hãy xét vị trí tương đối của Δ_1 và Δ_2.

Bài 13. Cho Δ_1: $3x + y - 6 = 0$; Δ_2: $2x - y + 5 = 0$

a) Tính góc giữa Δ_1 và Δ_2.

b) Tìm m để khoảng cách từ A(1; m) đến Δ_1 bằng khoảng cách từ A đến Δ_2.

Bài 14. Tìm toạ độ C của ΔABC biết trọng tâm của tam giác nằm trên đường thẳng Δ: $3x - y - 8 = 0$, hai đỉnh A(2; –3); B(3; –2) và $S_{\Delta ABC} = \frac{3}{2}$.

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 10.

a) Vectơ $\overrightarrow{BC}(-2; -6) = -2(-1; -3)$ nên (BC) có vectơ pháp tuyến $\vec{u}(3; -1)$.

Vậy (BC): $3(x - 4) - (y - 3) = 0 \Leftrightarrow 3x - y - 9 = 0$

b) Ta có toạ độ trung điểm M của BC là M(3; 0)

$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = (5; -1)$ là vectơ chỉ phương của (AM).

$\Rightarrow$ phương trình (AB): $\begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = 1 - t \end{cases}$

Bài 11.

a) Đặt (BH): $9x - 3y - 4 = 0$, (CK): $x + y - 2 = 0$.

Do $BH \perp AC \Rightarrow$ đường thẳng (AC) qua A(2; 2) nhận $\overrightarrow{u_{BH}}(3; -1)$ làm vectơ chỉ phương. Vậy: (AC): $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 2 - t \end{cases}$ $(t \in R)$.

Tương tự ta tìm được (AM): $\begin{cases} x = 2 + m \\ y = 2 - m \end{cases}$ $(m \in R)$.

(BC): $\begin{cases} x = -1 + 7n \\ y = 3 + 5n \end{cases}$ $(n \in R)$.

b) $-3x + y + 4 = 0$.

Bài 12. Xét hệ (I) $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x + my + 1 = 0 \end{cases}$, hệ này tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases} x = 2 - y \\ 2 - y + my + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - y \\ (m - 1)y = -3 \quad (*) \end{cases}$$

Như vậy từ (*) ta có kết quả sau:

* Nếu $m \neq 1 \Rightarrow$ (*) có nghiệm duy nhất $\Rightarrow$ (I) có nghiệm duy nhất $\Rightarrow \Delta_1$ cắt Δ_2.

* Nếu $m \neq 1 \Rightarrow$ (*) vô nghiệm $\Rightarrow$ (I) vô nghiệm $\Rightarrow \Delta_1 // \Delta_2$

Bài 13.

a) Gọi φ là góc giữa Δ_1 và Δ_2 ta có:

$$\cos\varphi = \frac{|3.2 + 1(-1)|}{\sqrt{3^2 + 1^2}\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{2}\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$$

b) $d(A; \Delta_1) = d(A; \Delta_2) \Leftrightarrow \dfrac{|3 + m - 6|}{\sqrt{10}} = \dfrac{|1 - m + 5|}{\sqrt{5}}$

$\Leftrightarrow |m - 3| = \sqrt{2}\,|6 - m|$

$$\left[\begin{array}{l} m - 3 = \sqrt{2}(6 - m) \\ m - 3 = -\sqrt{2}(6 - m) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{3(2\sqrt{2} + 1)}{1 + \sqrt{2}} \\ m = \dfrac{3 - 6\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} \end{array}\right.$$

Bài 14. Gọi C $(x_0; y_0) \Rightarrow G\left(\dfrac{x_0 + 5}{3}; \dfrac{y_0 - 5}{3}\right)$.

Do $G \in (d): 3x - y - 8 = 0 \Rightarrow 3\left(\dfrac{x_0 + 5}{3}\right) - \dfrac{y_0 - 5}{3} - 8 = 0$ (1)

Mặt khác ta có:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.d(C,AB) \Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\left|\frac{x_0 - y_0 - 5}{\sqrt{2}}\right| \quad (2)$$

(AB: $x - y - 5 = 0$)

Giải hệ (1), (2) $\Rightarrow$ toạ độ điểm C cần tìm.

§2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phương trình đường tròn tâm I(a; b) bán kính R

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

2. Phương trình

$x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ với điều kiện $a^2+b^2-c>0$ là phương trình đường tròn tâm I(a; b) bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

3. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn có phương trình

$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ tại điểm $M_0(x_0; y_0)$ là:

$(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)=0.$

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Tìm tâm và bán kính các đường tròn sau:

a) $x^2+y^2-2x-2y-2=0$

b) $16x^2+16y^2+16x-8y-11=0$

c) $x^2+y^2-4x+6y-3=0.$

Giải

a) Phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$(x-1)^2+(y-1)^2=4$$

Vậy tâm của đường tròn có phương trình đã cho là I(1; 1), bán kính R = 2.

b) Phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$x^2+y^2+x-\frac{1}{2}y-\frac{11}{16}=0$$

$\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=1$. Vậy tâm là $I\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$ và R = 1.

c) Phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$(x-2)^2+(x+3)^2=16$$

Vậy tâm là I(2; –3) và bán kính R = 4.

Bài 2. Lập phương trình đường tròn (C) trong các trường hợp sau:

a) (C) có tâm I(– 2; 3) và đi qua M(2; – 3)

b) (C) có tâm I(–1; 2) và tiếp xúc với đường thẳng d: $x-2y+7=0$

c) (C) có đường kính AB với A(1; 1), B(7; 5)

Giải

a) (C) có tâm I(– 2; 3) và đi qua M(2; – 3) nên bán kính

$$R = IM = \sqrt{(2+2)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{52}$$

Vậy (C): $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 52$.

b) Do (C) có tâm I(–1; 2) và tiếp xúc với d: $x - 2y + 7 = 0$

$$\Rightarrow \quad R = d(I, d) = \frac{|-1-4+7|}{\sqrt{1+4}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Vậy (C): $(x+1)^2 + (y-2)^2 = \frac{4}{5}$.

c) Gọi $I(x_I; y_I)$ là trung điểm AB ta có: $\begin{cases} x_I = \dfrac{1+7}{2} = 4 \\ y_I = \dfrac{1+5}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow I(4; 3)$

(C) có đường kính AB tâm là I(4; 3) và bán kính

$$R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(7-1)^2 + (5-1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{52}}{2}.$$

Vậy (C): $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 13$.

Bài 3. Lập phương trình đường tròn qua ba điểm:

a) A(1; 2), B(5; 2) và C(1; – 3)

b) A(–2; 4), B(5; 5) và C(6; – 2)

Giải

a) Gọi phương trình cần tìm:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \text{ với } a^2 + b^2 - c > 0$$

Theo bài ra ta có hệ: $\begin{cases} 1^2 + 2^2 - 2a - 4b + c = 0 \\ 5^2 + 2^2 - 10a - 4b + c = 0 \\ 1^2 + (-3)^2 - 2a + 6b + c = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a - 4b + c + 5 = 0 \\ -10a - 4b + c + 29 = 0 \\ -2a + 6b + c + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -\dfrac{1}{2} \\ c = -1 \end{cases}$$

Vậy đường tròn cần tìm có phương trình: $x^2 + y^2 - 6x + y - 1 = 0$

b) Dễ thấy $MP^2 = MN^2 + NP^2$. Vậy ba điểm M, N, P lập thành ba đỉnh của một tam giác vuông tại N.

Gọi I là trung điểm MP ta tính được I(2; 1), vậy đường tròn cần tìm có tâm I(2; 1) và bán kính $R = \frac{MP}{2} = 5$.

Vậy phương trình cần tìm: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$.

Bài 4. Lập phương trình đường tròn tiếp xúc với hai trục tọa độ Ox, Oy và qua M(2; 1).

Giải

Gọi I(a; b) là tâm phương trình đường tròn cần tìm, do đường tròn tiếp xúc với Ox, Oy nên ta có:

$$d(I, Ox) = d(I, Oy) = R \Leftrightarrow |a| = |b| = R \qquad (1)$$

Mặt khác do đường tròn qua M(2; 1) nên ta có:

$$IM = R \Leftrightarrow \sqrt{(2 - a)^2\ (1 - b)^2} = R \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ: $\begin{cases} |a| = |b| = R \\ \sqrt{(2 - a)^2 + (1 - b)^2} = R \end{cases}$ (I)

Do đường tròn cần tìm qua M(2; 1) nên tâm I(a; b) của đường tròn phải nằm ở phần tư thứ nhất của mặt phẳng (Oxy) tức là a, b > 0 nên hệ (I)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = R \\ \sqrt{(2 - a)^2 + (1 - b)^2} = R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = R \\ a^2 - 6a + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = R \\ \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = 5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = b = 1 \\ R = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a = b = 5 \\ R = 5 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy có hai đường tròn thỏa mãn lần lượt có phương trình là:

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1 \text{ và } (x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25.$$

Bài 5. Lập phương trình của đường tròn tiếp xúc với hai trục tọa độ và có tâm nằm trên đường thẳng d: $4x - 2y - 8 = 0$

Giải

Gọi I(a; b) theo bài ra ta có: $\begin{cases} |a| = |b| = R & (1) \\ 4a - 2b - 8 = 0 & (2) \end{cases}$

Từ (1), ta có: $a = b$ hoặc $a = -b$

+ Nếu a = b: thế vào (2) ta có: $2a = 8 \Leftrightarrow a = 4$

Vậy tâm I(4; 4) và bán kính R = 4.

$\Rightarrow$ phương trình đường tròn cần tìm: $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 16$.

+ Nếu a = –b: thế vào (2) ta có: $6a - 8 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{4}{3}$

Vậy tâm $I(\frac{4}{3}; -\frac{4}{3})$ và bán kính $R = \frac{4}{3}$.

$\Rightarrow$ phương trình đường tròn cần tìm: $(x - \frac{4}{3})^2 + (y - \frac{4}{3})^2 = \frac{16}{9}$.

ài 6. Cho (C): $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$

a) Tìm tọa độ tâm và bán kính của (C).

b) Viết phương trình tiếp tuyến với (C) đi qua điểm A(–1; 0)

c) Viết phương trình tiếp tuyến với (C) vuông góc với đường thẳng

$\Delta: 3x - 4y + 5 = 0$.

Giải

Ta có (C): $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$

a) Tâm (C) là I(2; – 4) và bán kính R = 5.

b) Cách 1:

Đường thẳng Δ_1 qua A(–1; 0) có dạng: $a(x + 1) + b(y - 0) = 0$ $(a^2 + b^2 = 0)$

$\Leftrightarrow ax + by + a = 0$, Δ_1 là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi:

$$d(I; \Delta_1) = R \Leftrightarrow \frac{|2a - 4b + a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 5 \Leftrightarrow |3a - 4b| = 5\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Leftrightarrow 9a^2 - 24ab + 16b^2 = 25a^2 + 25b^2 \Leftrightarrow 16a^2 + 24ab + 9b^2 = 0$$

$(4a + 3b)^2 = 0 \Leftrightarrow 4a + 3b = 0$, ta chọn a = 3, b = 4

Vậy phương trình tiếp tuyến Δ_1: $3x - 4y + 3 = 0$

Cách 2:

Dễ thấy tọa độ A thỏa mãn phương trình (C). Vậy phương trình của (C) tại A là:

$$(-1 - 2)(x + 1) + (0 + 4)(y - 0) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y + 3 = 0.$$

c) Đường thẳng $\Delta_2 \perp \Delta$: $3x - 4y + 5 = 0$ có phương trình:

$4x + 3y + m = 0$

Δ_2 là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi $d(I, \Delta_2) = R$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{|4.2 + 3.(-4) + m|}{\sqrt{16+9}} = 5 \Leftrightarrow |m - 4| = 25$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} m - 4 = 5 \\ m - 4 = -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 9 \\ m = -1 \end{array}\right.$$

Vậy có hai tiếp tuyến thỏa mãn là:

$4x + 3y + 9 = 0$ và $4x + 3y - 1 = 0$.

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Bài 7. Cho (C): $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$

a) Tìm tâm và bán kính của (C).

b) Hãy viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song son
với Δ: $x + y - 1 = 0$.

Bài 8. Lập phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C):

$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 16$, biết tiếp tuyến qua A(8; 10)

Bài 9. Cho hai đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 1$ và

(C_m): $x^2 + y^2 - 2(m + 1)x + 4my - 5 = 0$.

Tìm m để (C) tiếp xúc (C_m).

Bài 10*. Tìm độ dài dây cung xác định bởi đường thẳng: $4x + 3y - 8 =$
với đường tròn tâm I(2; 1) và tiếp xúc với đường thẳng:

Δ: $5x - 12y + 15 = 0$

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 7. (C) có tâm I(2; 1) bán kính R = 3.

Tiếp tuyến: Δ': $x + y - 3 \pm 3\sqrt{2} = 0$.

Bài 8. Phương trình cần tìm là:

$(-49 - 4\sqrt{82})x + 33y - 8(-49 - 4\sqrt{82}) - 330 = 0$

Bài 9. $m = -1$ hay $m = \frac{3}{5}$ thoả mãn bài toán.

Bài 10. Đường tròn (C) tâm I(2; 1) bán kính

$$R = d(I; \Delta) = \frac{|5.2 - 12.1 + 15|}{\sqrt{25 + 144}} = 1$$

Vậy (C): $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$

Đường thẳng Δ: $5x - 12y + 15 = 0$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt c
toạ độ thoả mãn: $\begin{cases} 4x + 3y - 8 = 0 & (1) \\ (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1 & (2) \end{cases}$

Từ (1), ta có: $3y = 8 - 4x \Rightarrow y = \dfrac{8 - 4x}{3}$ thế vào (2), ta có phương trình:

$$(x - 2)^2 + \left(\frac{8 - 4x}{3} - 1\right)^2 = 1 \Leftrightarrow 9(x - 2)^2 + (8 - 4x - 3)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow 9(x^2 - 4x + 4) + 25 - 40x + 16x^2 - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 25x^2 + 76x + 52 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{26}{25} \end{array}\right.$$

Khi $x = 2$ thì $y = 0$. Vậy giao điểm là $A(2; 0)$.

Khi $x = \dfrac{26}{25}$ thì $y = 1{,}28$. Vậy giao điểm là $B(\dfrac{26}{25}; 1{,}28)$

Vậy $AB = \sqrt{\left(\dfrac{26}{25} - 2\right)^2 + (1{,}28 - 0)^2} = \dfrac{8}{5}$

§3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG ELIP

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa elip

Trong mặt phẳng cho hai điểm cố định F_1 và F_2. Elip là tập hợp các điểm M sao cho tổng $F_1M + F_2M = 2a$ không đổi, F_1 và F_2 là tiêu điểm, $F_1F_2 = 2c$ là tiêu cự.

2. Phương trình chính tắc của Elip

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ với } b^2 = a^2 - c^2$$

3. Cho elip (E) có phương trình chính tắc

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ta có

(E) cắt Ox tại $A_1(-a; 0)$ và $A_2(a; 0)$

(E) cắt Oy tại $B_1(0; -b)$ và $B_2(0; b)$, bốn điểm A_1, A_2, B_1, B_2 là bốn đỉnh của (E), A_1A_2 gọi là trục lớn, B_1B_2 là trục nhỏ của (E).

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Xác định độ dài các trục, toạ độ tiêu điểm, toạ độ các đỉnh của elip có phương trình sau:

a) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ b) $4x^2 + 9y^2 = 1$ c) $4x^2 + 9y^2 = 36$

Giải

a) Ta có $a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$, $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$ từ

$b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow 9 = 25 - c^2 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$.

Vậy trục lớn có độ dài 10, trục bé có độ dài 6

Bốn đỉnh của elip là $A_1(-5; 0)$, $A_2(5; 0)$, $B_1(0; -3)$, $B_2(0; 3)$

Tiêu điểm $F_1(-4; 0)$, $F_2(4; 0)$

b) Phương trình $4x^2 + 9y^2 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 1$

$\Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{1}{3}$ và $c = \dfrac{\sqrt{5}}{6}$

Suy ra toạ độ của đỉnh:

$A_1\left(-\dfrac{1}{2}; 0\right)$, $A_2\left(\dfrac{1}{2}; 0\right)$, $B_1\left(0; -\dfrac{1}{3}\right)$, $B_2\left(0; \dfrac{1}{3}\right)$

Độ dài trục lớn $A_1A_2 = 1$, độ dài trục bé $B_1B_2 = \dfrac{2}{3}$

Tiêu điểm $F_1\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{6}; 0\right)$, $F_2\left(\dfrac{\sqrt{5}}{6}; 0\right)$

c) Phương trình $4x^2 + 9y^2 = 36 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

$\Rightarrow a = 3$, $b = 2$ và $4 = 9 - c^2 \Rightarrow c^2 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$

Suy ra tọa độ của đỉnh $A_1(-3; 0)$, $A_2(3; 0)$, $B_1(0; -2)$, $B_2(0; 2)$

Độ dài trục lớn $A_1A_2 = 6$, độ dài trục bé $B_1B_2 = 4$

Tiêu điểm $F_1(-\sqrt{5}; 0)$, $F_2(\sqrt{5}; 0)$.

Bài 2. Lập phương trình chính tắc của elip biết:

a) Trục lớn và trục nhỏ lần lượt là 8 và 6.

b) Trục lớn bằng 10 và tiêu cự bằng 6.

Giải

Gọi elip có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > b > 0$

a) Trục lớn bằng 8 ta có $2a = 8 \Rightarrow a = 4$

Trục lớn bằng 6 ta có $2b = 6 \Rightarrow b = 3$

Vậy elip có phương trình: $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

b) Trục lớn bằng 10 $\Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5$, tiêu cự bằng 6

$\Rightarrow 2c = 6 \Rightarrow c = 3$

Mặt khác $b^2 = a^2 - c^2 \quad \Rightarrow b^2 = 25 - 9 = 16$.

Vậy phương trình cần tìm là: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

Bài 3. Lập phương trình chính tắc của elip trong các trường hợp sau:

a) Elip qua các điểm M(0; 3) và $N\left(3; -\frac{12}{5}\right)$.

b) Một tiêu điểm là $F_1(-\sqrt{3}; 0)$ và điểm $M\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ nằm trên elip

Giải

Gọi Elip (E) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > b > 0$

a) Theo bài ra ta có: $\begin{cases} \frac{0}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1 \\ \frac{9}{a^2} + \frac{144}{25b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 9 \\ a^2 = 25 \end{cases}$.

Vậy Elip (E) cần tìm có phương trình: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

b) Do (E) có tiêu điểm $F_1(-\sqrt{3}; 0) \Rightarrow -c = -\sqrt{3} \Rightarrow c^2 = 3$

$\Leftrightarrow b^2 = a^2 - 3 \quad (1)$

Mặt khác do Elip qua $M\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ nên ta có $\frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1 \ (2)$

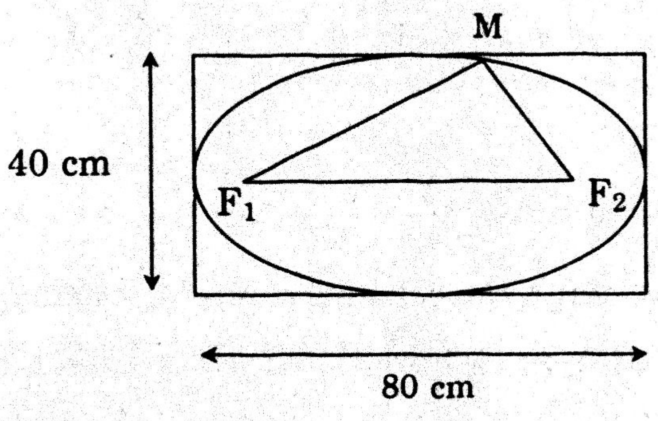
Thế (1) vào (2) ta có $\frac{1}{a^2} + \frac{3}{4(a-3)^2} = 1$

$\Leftrightarrow 4(a^2 - 3) + 3a^2 = 4(a^4 - 3a^2)$

$\Leftrightarrow 4a^4 - 19a^2 + 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow b^2 = \frac{3}{4} - 3 = -\frac{9}{4} \text{ (loại)} \\ a^2 = 4 \Rightarrow b^2 = 1 \text{ (thoả mãn)} \end{array}\right.$

Vậy phương trình cần tìm: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$

Bài 4. Ta cắt một bảng hiệu quảng cáo hình elip có các trục lớn và trục nhỏ là 80 cao 40cm từ một tấm ván ép hình chữ nhật có kích thước 80cm × 40cm. Người ta vẽ một hình elip lên tấm ván ép như hình dưới đây. Hỏi phải ghim hai cái đinh cách các mép tấm ván ép bao nhiêu? Và lấy vòng dây có độ dài bao nhiêu?



Giải

Theo bài ta có: $2a = 80 \Leftrightarrow a = 40,\ 2b = 40 \Leftrightarrow b = 20$

Mặt khác ta có $b^2 = a^2 - c^2$

$\Rightarrow \quad c^2 = a^2 - b^2 = 40^2 - 20^2 = 1600 - 400 = 1200$

$\Rightarrow \quad c = \sqrt{1200} = 20\sqrt{3}$

$\Rightarrow \quad F_1(-20\sqrt{3}\,;\,0)$ và $F_2(20\sqrt{3}\,;\,0)$ và $F_1F_2 = 2c = 40\sqrt{3}$

Vậy ta phải ghim hai đinh F_1 và F_2 cách mép tấm ván là:

$\dfrac{80 - 40\sqrt{3}}{2} = 40 - 20\sqrt{3}$ (cm) và vòng dây có độ dài:

$2a + 2c = 80 + 40\sqrt{3}$ (cm).

Bài 5. Cho hai đường tròn $C_1(F_1; R_1)$ và $C_2(F_2; R_2)$, C_1 chứa trong C_2 v $F_1 \neq F_2$. Hãy chứng tỏ rằng tâm M của (C) di động trên một elip.

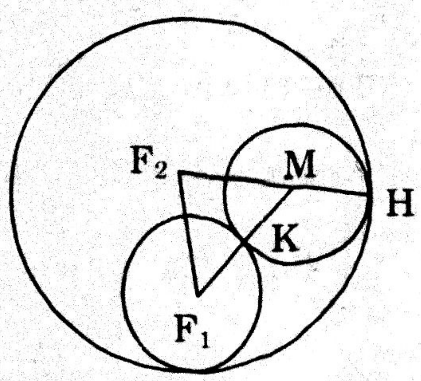
Giải

Xét đường tròn (C) tâm M tiếp xúc ngoài với (C_1) và tiếp xúc trong với (C_2) tại H. Ta có:

$MF_1 + MF_2 = MK = KF_1 + F_2H - MH$

$= KF_1 + HF_2 = R_1 + R_2$ (không đổi)

Vậy tập hợp điểm M là elip có các tiêu điểm F_1, F_2 và độ dài trục lớn $2a = R_1 + R_2$



III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Bài 6. Cho elip (E) $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{64} = 1$

a) Xác định độ dài các trục, toạ độ tiêu điểm, các đỉnh của (E)

b) Đường thẳng $x = \sqrt{50}$ cắt (E) tại 2 điểm phân biệt A, B. Tính AB.

Bài 7. Lập phương trình chính tắc của elip trong các trường hợp sau:

a) Một tiêu điểm $F_1(-2; 0)$ và độ dài trục lớn bằng 10

b) Độ dài trục lớn bằng 6 và tiêu cự bằng 4

c) Elip qua 2 điểm $A(2; 0)$ và $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$

Bài 8. Cho elip (E) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ và điểm $I(1; 2)$. Viết phương trình của đường thẳng đi qua I biết rằng đường thẳng đó cắt (E) tại hai điểm M và N sao cho I là trung điểm MN.

Bài 9*. Cho 3 điểm A, B, C cố định theo thứ tự này trên đường thẳng cố định d, đường tròn (C) thay đổi tiếp xúc với đ tại A. Từ B và C kẻ những tiếp tuyến với (C). Hai tiếp tuyến này cắt nhau tại M. Tìm tập hợp điểm M.

V. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 6.

a) Ta có $a^2 = 100 \Rightarrow a = 10$, $b^2 = 64 \Rightarrow b = 8 \Rightarrow c = \sqrt{100 - 64} = 6$

Vậy độ dài trục lớn $2a = 20$, độ dài trục bé $2b = 16$.

Tọa độ các đỉnh: $A_1(-10; 0)$, $A_2(10; 0)$, $B_1(0; -8)$ và $B_2(0; 8)$

Tọa độ tiêu điểm $F_1(-6; 0)$ và $F_2(6; 0)$

b) $AB = \sqrt{128}$

Bài 7.

a) Elip có phương trình: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$

b) Elip có phương trình: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

c) Elip cần tìm: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{16}{13}} = 1$

Bài 8. Dễ thấy đường thẳng $x = 1$ qua $I(1; 2)$ và song song với Oy không thoả mãn. Xét đường thẳng d qua $I(1; 2)$, hệ số góc k có phương trình: $y = k(x + 1) + 2$. Hoành độ giao điểm của Δ và (E):

$$\frac{x^2}{16} + \frac{[k(x-1)+2]^2}{9} = 1 \Leftrightarrow 9x^2 + 16(kx - k + 2)^2 - 9 \times 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow (9 + 16k^2).x^2 + (64k - 32k^2).x + 16k^2 - 64k - 80 = 0 \qquad (1)$$

Đường thẳng Δ thoả mãn bài toán khi và chỉ khi pt (1) có nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn điều kiện $x_1 + x_2 = 2$ (2)

Ta có (2) $\Leftrightarrow \dfrac{-(64k - 32k^2)}{9 + 16k^2} = 2 \Leftrightarrow 32k^2 - 64k = 18 + 32k^2$

$\Leftrightarrow k = -\dfrac{1}{3}$

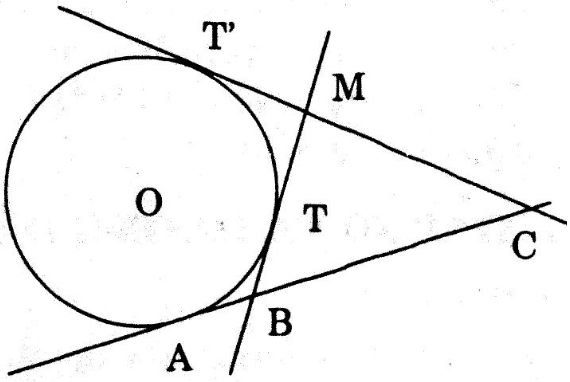
Thay $k = -\dfrac{1}{3}$ vào (1) ta thấy (1) có hai nghiệm phân biệt nê

$k = -\dfrac{1}{3}$ thoả mãn. Vậy Δ: $y = -\dfrac{1}{3}(x - 1) + 2$ hay Δ: $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{7}{3}$

Bài 9*. Ta có

MB = MT + TB = MT + AB và MC = CT' − T'M = CA − MT nên MB + MC = AB + AC (không đổi).

Vậy tập hợp điểm M là elip có hai tiêu điểm B, C độ dài trục lớn 2a = AB + AC



ÔN TẬP CHƯƠNG III

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phương trình đường thẳng

- Vectơ chỉ phương của đường thẳng, phương trình tham số, phương trình chính tắc của đường thẳng.
- Phương trình tham số của đường thẳng: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$

Vectơ pháp tuyến của đường thẳng, phương trình tổng quát của đường thẳng: $Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 \neq 0$

- Vị trí tương đối của hai đường thẳng.
- Góc giữa hai đường thẳng: $\cos\varphi = \dfrac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}.\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$
- Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng:

$$d(M, \Delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

2. Phương trình đường tròn, phương trình tiếp tuyến của đường tròn

3. Phương trình elip

- Định nghĩa elip.
- Phương trình chính tắc elip: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 1)$
- Hình dạng elip.
- Quan hệ giữa elip và đường tròn.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Cho hình chữ nhật ABCD. Biết A(5; 1), C(0; 6) và phương trình cạnh CD: $x + 2y - 12 = 0$. Tìm phương trình các cạnh còn lại.

Giải

Cạnh AB // CD. Vậy đường thẳng AB qua A(5; 1) nhận $\vec{n}_{CD}(1; 2)$ làm vectơ chỉ phương nên AB: $1.(x - 5) + 2(y - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x + 2y - 7 = 0$

- Đường thẳng AD đi qua A(5; 1) và nhận $\vec{n}_{CD}(2;1)$ làm vectơ chỉ phương nên (AD): $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$
- Đường thẳng BC đi qua C(0; 6) và nhận $\vec{n}_{CD}(2; 1)$ làm vectơ chỉ phương nên (BC): $\begin{cases} x = 0 + t \\ y = 6 + 2t \end{cases}$

Bài 2. Cho A(1; 2), B(−3; 1), và C(4; −2). Tìm tập hợp các điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 = MC^2$.

Giải

Gọi M(x; y) ta có: $MA^2 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2$, $MB^2 = (x + 3)^2 + (y - 1)^2$, $MC^2 = (x - 4)^2 + (y + 2)^2$

Nên $MA^2 + MB^2 = MC^2$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = (x - 4)^2 + (y + 2)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 =$

$= x^2 - 8x + 16 + y^2 + 4y + 4$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 10y - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y - 5)^2 = 30.$

Vậy trong mặt phẳng Oxy tập hợp điểm M cần tìm là đường tròn (C) có tâm I(0; 5), bán kính $R = \sqrt{30}$.

Bài 3. Tìm tập hợp các điểm cách đều hai đường thẳng:

Δ_1: $5x + 3y - 3 = 0$ và Δ_2: $5x + 3y + 7 = 0$.

Giải

Dễ thấy $\Delta_1 // \Delta_2$, nên tập hợp các điểm cách đều hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 là đường thẳng Δ song song với Δ_1, Δ_2 và khoảng cách từ Δ đến Δ_1 bằng khoảng cách từ Δ đến Δ_2. Vậy Δ: $5x + 3y + c = 0$ ($c \neq -3$ và $c \neq 7$).

Ta lấy $I\left(0; \frac{c}{3}\right) \in \Delta$ ta có $d(I, \Delta_1) = d(I, \Delta_2) \Leftrightarrow \frac{|c-3|}{\sqrt{3^2+5^2}} = \frac{|c+7|}{\sqrt{3^2+5^2}}$

$\Leftrightarrow |c - 3| = |c + 7| \Leftrightarrow c = 2 \Rightarrow \Delta$: $5x + 3y - 2 = 0$.

Vậy tập hợp điểm cần tìm là đường thẳng Δ: $5x + 3y - 2 = 0$

Bài 4. Cho đường thẳng Δ: $x - y + 2 = 0$ và hai điểm O(0; 0), A(2; 0)

a) Tìm điểm đối xứng của O qua Δ.

b) Tìm điểm M trên Δ sao cho độ dài đường gấp khúc OMA ngắn nhất.

Giải

a) Đường thẳng d đi qua O(0; 0) và vuông góc với Δ sẽ nhận $\vec{n}\,\Delta(1; -1)$ làm vectơ chỉ phương.

Vậy d: $\begin{cases} x = 0 + t \\ y = 6 - t \end{cases}$

Tọa độ giao điểm của d và Δ là nghiệm hệ:

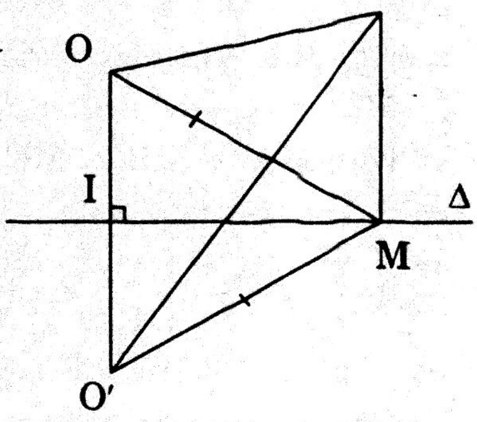
$$\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x = t \\ y = -t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = -2 \\ x = t \\ y = -t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy giao điểm của d và Δ là I(–1; 1)

Gọi $O'(x'_0, y'_0)$ là điểm đối xứng với O qua Δ từ đó I là trung điểm OO'

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_0 + x'_0}{2} \\ y_I = \dfrac{y_0 + y'_0}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = \dfrac{0 + x'_0}{2} \\ 1 = \dfrac{0 + y'_0}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -2 \\ y_0 = 2 \end{cases} \Rightarrow O'(-2; 2)$$



b) Đặt $F(x, y) = x - y + 2$ ta có:

$F(0, 0) = 2 > 0$, $F(2; 0) = 4 > 0$

Vậy hai điểm C(0; 1) và A (2; 0) nằm về cùng một phía so với Δ, C là điểm đối xứng của O' qua Δ theo a, ta có O'(–2; 2).

Với mọi điểm $M \in \Delta$ ta có:

$$OM + MA = O'M + MA \geq O'A.$$

Vậy min(OM + MA) = O'A đạt được khi M là giao điểm của Δ và AO'.

Để tìm tọa độ M (như vậy) trước hết ta lập phương trình AO', thật vậy ta có

$$\overrightarrow{AO} = (-4; +2) = -2(2; -1) \quad \Rightarrow (AO'): \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 0 - t \end{cases}$$

Tọa độ điểm M là nghiệm hệ sau:

$$\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x = 2t + t \\ y = -t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 2t + t + 2 = 0 \\ x = 2 + 2t \\ y = -t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\dfrac{3}{4} \\ x = -\dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Vậy $M\left(-\dfrac{2}{3}; \dfrac{4}{3}\right)$ là điểm cần tìm.

Bài 5. Cho ba điểm A(4; 3), B(2; 7), C(–3; –8)

a) Tìm tọa độ trọng tâm G, trực tâm H, tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔABC

b) Chứng minh rằng: I, G, H thẳng hàng.

c) Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC

Giải

a) Ta dễ thấy ΔABC vuông tại B

* Gọi $G(x_G; y_G)$ là trọng tâm ΔABC ta có

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = \dfrac{4 + 2 - 3}{3} = 1 \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = \dfrac{3 + 7 - 8}{3} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Vậy $G\left(1; \dfrac{2}{3}\right)$.

* Do ΔABC vuông tại B vậy trực tâm H trùng với B(2; 7).

* Do ΔABC vuông tại B nên tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC là trung điểm I của AC, gọi $I(x_I; y_I)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{4 - 3}{2} = \dfrac{1}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{3 - 8}{2} = -\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Vậy $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right)$.

b) Ta có $\overrightarrow{IG} = \left(1 - \frac{1}{2}; \frac{2}{3} + \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}; \frac{19}{6}\right)$; $\overrightarrow{GH} = \left(1; 7 - \frac{2}{3}\right) = \left(1; \frac{19}{3}\right)$

Dễ thấy $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$, nên ba điểm I, G, H thẳng hàng.

c) Đường tròn ngoại tiếp ΔABC có tâm $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right)$ và bán kính $R = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{170}}{2}$.

Vậy phương trình là: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{170}{4}$.

Bài 6. Lập phương trình hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường sau: $\Delta: 3x - 4y + 12 = 0$ và $\Delta': 12x + 5y - 7 = 0$.

Giải

Trong mặt phẳng Oxy gọi M(x; y) thuộc các đường phân giác cần tìm từ đó ta có: d(M, A) = d(M, A')

$$\Leftrightarrow \frac{|3x - 4y + 12|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|12x + 5y - 7|}{\sqrt{12^2 + 5^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|3x - 4y + 12|}{\sqrt{25}} = \frac{|12x + 5y - 7|}{\sqrt{169}}$$

$$\Leftrightarrow 13|3x - 4y + 12| = 5|12x + 5y - 7|$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 13(3x - 4y + 12) = 5(12x + 5y - 7) \\ 13(3x - 4y + 12) = -5(12x + 5y - 7) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 21x - 77y + 191 = 0 & (1) \\ 99x - 27y + 121 = 0 & (2) \end{array}\right.$$

Vậy tập hợp M là hai đường thẳng có phương trình (1) và (2).

Bài 7. Cho đường tròn (C) có tâm I(1; 2) và bán kính bằng 3. Chứng minh rằng tập hợp các điểm M mà từ đó ta vẽ được hai tiếp tuyến với (C) tạo với nhau một góc 60^0 là một đường tròn và viết phương trình đường tròn đó.

Giải

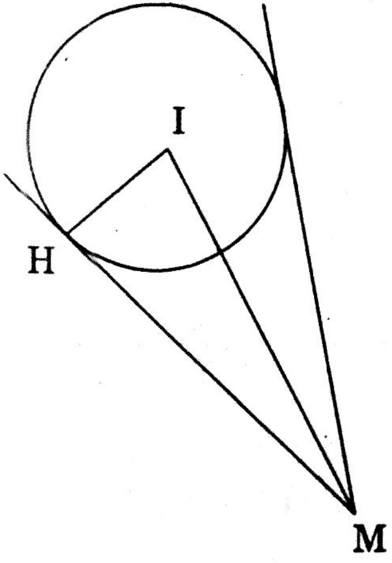
Giả sử M là một điểm mà từ đó vẽ được hai tiếp tuyến tới (C) sao cho hai tiếp tuyến đó tạo với nhau một gó 60°. Giả sử H là tiếp điểm của một trong hai tiếp tuyến đó ta có ΔMIH vuông tại H, $\widehat{HMI} = 30°$.

$$\Rightarrow IM = \frac{IH}{\sin 30^\circ} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$$

Vậy M cách điểm I cố định một khoảng bằng 6.

$\Rightarrow$ M thuộc đường tròn tâm I(1; 2) bán kính $R' = 6$.

Phương trình: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 36$.



Bài 8. Tính góc giữa hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 trong các trường hợp sau:

a) Δ_1: $2x + y - 4 = 0$ và Δ_2: $5x - 2y + 3 = 0$.

b) Δ_1: $y = -2x + 4$ và Δ_2: $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

Giải

a) Gọi φ là góc giữa Δ_1, Δ_2 ta có:

$$\cos\varphi = \frac{|2.5 + 1(-2)|}{\sqrt{2^2 + 1^2}.\sqrt{5^2 + (-2)^2}} = \frac{8}{\sqrt{5}.\sqrt{29}} = \frac{8}{\sqrt{145}}$$

Vậy φ là góc thỏa:

$$\cos\varphi = \frac{8}{\sqrt{145}}$$

(Ta có thể tính gần đúng nhờ máy tính bỏ túi, hoặc tra bảng số)

b) Δ_1 có hệ số góc $k_1 = -2$

Δ_2 có hệ số góc $k_2 = 2$

$\Rightarrow k_1.k_2 = -1 \Rightarrow \Delta_1 \perp \Delta_2$

$\Rightarrow$ góc giữa Δ_1 và Δ_2 bằng 90°.

Bài 9. Cho elip (E): $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Tìm tọa độ các đỉnh, các tiêu điểm và vẽ elip đó.

Giải

Ta có $a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$

$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

Mà $c^2 = a^2 - b^2$

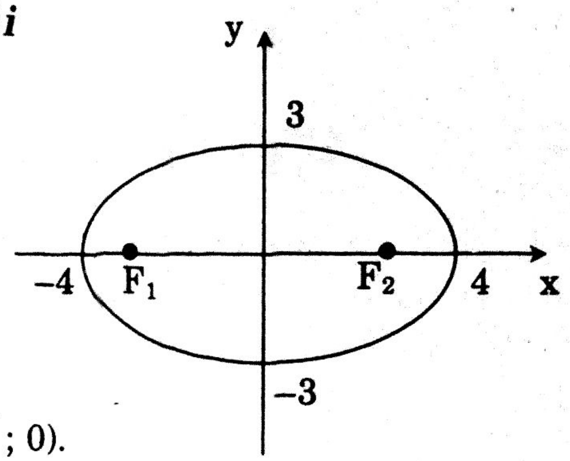
$\Rightarrow c^2 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}$

Vậy elip có 4 đỉnh:

$A_1(-4; 0)$, $A_2(4; 0)$,

$B_1(0; -3)$, $B_2(0; 3)$

Tiêu điểm elip $F_1(-\sqrt{7}; 0)$, $F_2(\sqrt{7}; 0)$.



Bài 10. Ta biết rằng Mặt Trăng chuyển động quanh Trái Đất theo một quỹ đạo là một elip mà Trái Đất là tiêu điểm. Elip đó có độ dài trục lớn là 769266 km và độ dài trục bé là 768106 km. Tính khoảng cách ngắn nhất và khoảng cách dài nhất từ Trái Đất đến Mặt Trăng. Biết rằng các khoảng cách đó đạt được khi Mặt Trăng và Trái Đất nằm trên trục lớn của elip.

Giải

Độ dài trục lớn là $2a = 769266 \Rightarrow a = 384633$

Độ dài trục bé là $2b = 768106 \Rightarrow b = 384053$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\quad c^2 &= (384633)^2 - (384053)^2\\
&= (384633 + 384053)(384633 - 384053)\\
&= 445837880
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\quad c = \sqrt{445837880}$$

$$\Rightarrow\quad 2c = 2\sqrt{445837880}$$

$$\Rightarrow\quad 2a - 2c = 769266 - 2\sqrt{445837880}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{2a - 2c}{2} = 384633 - \sqrt{445837880}$$

Vậy khoảng cách ngắn nhất từ Trái Đất đến Mặt Trăng là:

$$d_1 = \frac{2a - 2c}{2} = 384633 - \sqrt{445837880}\ \text{(km)}$$

Khoảng cách dài nhất từ Trái Đất đến Mặt Trăng là:

$$\begin{aligned}
d_2 &= 2c + \frac{2a - 2c}{2} = \frac{2a + 2c}{2}\\
&= a + c\\
&= 384633 + \sqrt{445837880}\ \text{(km)}
\end{aligned}$$

Nếu tính gần đúng ta có:

$d_1 \approx 363518,1$ (km),

$d_2 \approx 405747,9$ (km).

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Cho ΔABC có tọa độ các đỉnh $A(1; 2)$, $B(3; 1)$ và $C(5; 4)$. Phương trình nào là phương trình đường cao của tam giác vẽ từ A.

a) $2x + 3y - 8 = 0$; b) $3x - 2y - 5 = 0$;

c) $5x - 6y + 7 = 0$; d) $3x - 2y + 5 = 0$.

2. Cho ΔABC với các đỉnh là A(–1; 1), B(5; 3) và C(3; –2), M là trung điểm của AB. Phương trình tham số của trung tuyến CM là:

a) $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 + 4t \end{cases}$; b) $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 - 4t \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 4 + 2t \end{cases}$; d) $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -2 + 4t \end{cases}$

3. Cho phương trình tham số của đường thẳng (d): $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -9 - 2t \end{cases}$. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình tổng quát của (d)?

a) $2x + y - 1 = 0$; b) $2x + 3y + 1 = 0$;

c) $x + 2y + 2 = 0$; d) $x + 2y - 2 = 0$.

4. Đường thẳng đi qua điểm M(1; 0) và song song với đường thẳng d: $x + 2y + 1 = 0$ có phương trình tổng quát la:

a) $4x + 2y + 3 = 0$; b) $2x + y + 4 = 0$;

c) $2x + y - 2 = 0$; d) $x - 2y + 3 = 0$.

5. Cho đường thẳng d có phương trình tổng quát: $3x + 5y + 2006 = 0$. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

a) (d) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3; 5)$;

b) (d) có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (5; -3)$;

c) (d) có hệ số góc $k = \frac{5}{3}$;

d) (d) song song với đường thẳng $3x + 5y = 0$.

6. Giá trị nào sau đây bằng bán kính của đường tròn tâm I(1; –2) và tiếp xúc với đường thẳng Δ: $3x - 4y - 23 = 0$

a) 15; b) 5; c) $\frac{3}{5}$; d) 3.

7. Cho hai đường thẳng:

d_1: $2x + y + 4 - m = 0$ và d_2: $(m + 3)x + y - 2m - 1 = 0$

Với giá trị nào của m thì d_1 song song với d_2

a) m = 1; b) m = –1; c) m = 2; d) m = 3.

8. Giá trị nào sau đây là số đo của góc giữa hai đường thẳng:

d_1: $x + 2y + 4 = 0$; d_2: $2x - y + 6 = 0$

a) 30°; b) 60°; c) 45°; d) 90°.

9. Cho hai đường thẳng

Δ_1: $x + y + 5 = 0$ và Δ_2: $y = -10$. Góc giữa Δ_1 và Δ_2 là:

a) 45°; b) 30°; c) $88^\circ57'52''$; d) $4^\circ13'8''$.

10. Giá trị nào sao đây bằng khoảng cách từ M(0; 3) đến đường thẳng

Δ: $x\cos\alpha + y\sin\alpha + 3(2 - \sin\alpha) = 0$

a) $\sqrt{6}$; b) 6; c) $3\sin\alpha$; d) $\dfrac{3}{\sin\alpha + \cos\alpha}$

11. Phương trình nào sau đây là phương trình đường tròn:

a) $x^2 + 2y^2 - 4x - 8y + 1 = 0$; b) $4x^2 + y^2 - 10x - 6y - 2 = 0$;

c) $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 20 = 0$; d) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$.

12. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$. Trong các mệnh đề sau tìm mệnh đề sai:

a) (C) có tâm I(1; 2); b) (C) có bán kính R = 5;

c) (C) đi qua điểm M(2; 2); d) (C) không đi qua điểm A(1; 1).

13. Phương trình nào sau đây là phương trình tiếp tuyến tại M(3; 4) với đường tròn (C) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$:

a) $x + y - 7 = 0$; b) $x + y + 7 = 0$;

c) $x - y - 7 = 0$; d) $x + y - 3 = 0$.

14. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ và đường thẳng (Δ): $x + 2y + 1 = 0$. Trong các mệnh đề sau tìm mệnh đề đúng

a) Δ đi qua tâm của (C); b) Δ cắt (C) tại hai điểm;

c) Δ tiếp xúc với (C); d) Δ không có điểm chung với (C).

15. Tìm tâm I và bán kính R của đường tròn (C): $x^2 + y^2 - x + y - 1 = 0$ ta được:

a) I(−1; 1), R = 1; b) $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $R = \frac{\sqrt{6}}{2}$;

c) $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $R = \frac{\sqrt{6}}{2}$; d) I(1; −1), $R = \sqrt{6}$.

16. Với giá trị nào của m thì phương trình sau đây là phương trình đường tròn: $x^2 + y^2 - 2(m + 2)x + 4my + 19m - 6 = 0$

a) $1 < m < 2$; b) $-2 \le m \le 1$;

c) $m < 1$ hoặc $m > 2$; d) $m < -2$ hoặc $m > 1$.

17. Với giá trị nào của m thì đường thẳng Δ: $4x + 3y + m = 0$ tiếp xúc với đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 1$:

a) m = 3; b) m = 5; c) m = 1; d) m = 0;

18. Cho hai điểm A(1; 1) và B(7; 5), phương trình đường tròn đường kính AB là:

a) $x^2 + y^2 + 8x + 6y + 12 = 0$; b) $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 12 = 0$;
c) $x^2 + y^2 - 8x - 6y - 12 = 0$; d) $x^2 + y^2 + 8x + 6y - 12 = 0$.

19. Đường tròn đi qua ba điểm A(0; 2), B(–2; 0), C(2; 0) có phương trình là:

a) $x^2 + y^2 = 8$; b) $x^2 + y^2 + 2x + 4 = 0$;
c) $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$; d) $x^2 + y^2 - 4 = 0$.

20. Cho điểm M(0; 4) và đường tròn (C) có phương trình:
$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$. Tìm phát biểu đúng trong các phát biểu sau

a) M nằm ngoài (C); b) M nằm trên (C);
c) M nằm trong (C); d) M trùng với tâm (C).

21. Cho elip (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ và cho các mệnh đề:

(I) (E) có các tiêu điểm $F_1(-4; 0)$ và $F_2(4; 0)$;
(II) (E) có tỉ số $\frac{c}{a} = \frac{4}{5}$
(III) (E) có đỉnh $A_1 = (-5; 0)$
(IV) (E) có độ dài trục nhỏ bằng 3;

Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

a) (I) và (II); b) (II) và (III);
c) (I) và (III); d) (IV) và (I).

22. Lập phương trình chính tắc của elip có hai đỉnh là (–3; 0), (3; 0) và hai tiêu điểm là (–1; 0), (1; 0) ta được:

a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$; b) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{9} = 1$; c) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$; d) $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{9} = 1$.

23. Cho elip (E): $x^2 + 4y^2 = 1$; và cho các mệnh đề:

(I) (E) có trục lớn bằng 1;
(II) (E) có trục nhỏ bằng 4;
(III) (E) có tiêu điểm $F_1\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
(IV) (E) có tiêu cự bằng $\sqrt{3}$.

Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

a) (I); b) (II) và (IV);
c) (I) và (III); d) (IV) và (I).

24. Dây cung của elip (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(0 < b < a)$ vuông góc với trục lớn tại tiêu điểm có độ dài là:

a) $\frac{2c^2}{a}$; b) $\frac{2b^2}{a}$; c) $\frac{2a^2}{c}$; d) $\frac{a^2}{c}$.

25. Một elip có trục lớn bằng 26 tỉ số $\frac{c}{a} = \frac{12}{13}$. Trục nhỏ của elip bằng bao nhiêu?

a) 5; b) 10; c) 12; d) 24.

26. Cho elip (E): $4x^2 + 9y^2 = 36$. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

a) (E) có trục lớn bằng 6; b) (E) có trục nhỏ bằng 4;

c) (E) có tiêu cự bằng $\sqrt{5}$; d) (E) có tỉ số $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

27. Cho đường tròn (C) tâm F_1 bán kính 2a và một điểm F_2 ở bên trong (C). Tập hợp tâm M của đường tròn (C') thay đổi nhưng luôn đi qua F_2 và tiếp xúc với (C) là đường nào sao đây?

a) Đường thẳng; b) Đường tròn;

c) Elip; d) Parabol.

28. Cho điểm F(4; 0) và đường thẳng Δ: $x = \frac{25}{4}$. Tập hợp những điểm M trong mặt phẳng sao cho $MF = \frac{4}{5}MH$

a) Elip; b) Đường thẳng;

c) Parabol; d) Đường tròn.

29. Cho elip (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(0 < b < a)$. Gọi F_1, F_2 là hai tiêu điểm và cho điểm M(0; –b). Giá trị nào sau đây bằng giá trị của biểu thức $MF_1.MF_2 + OM^2$

a) $a^2 + b^2$; b) $2a^2$; c) $2b^2$; d) $a^2 - b^2$.

30. Cho elip(E): $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ và đường thẳng Δ: $y + 3 = 0$. Tích các khoảng cách từ hai tiêu điểm của (E) đến Δ bằng giá trị nào sau đây?

a) 16; b) 9; c) 81; d) 7.

Giải

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	a	b	a	c	c	d	b	d	a	b

Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	d	a	a	c	b	c	b	c	d	a

Câu	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Đáp án	d	c	d	b	a	c	c	a	a	b

1. Đường cao vẽ từ A(1; 2) nhận vectơ $\overrightarrow{BC}(2; 3)$ làm vectơ pháp tuyến.

Vậy phương trình là: $2(x - 1) + 3(y - 2) = 0$ hay $2x + 3y - 8 = 0$

⇒ Đáp án đúng là a)

2. Gọi $M(x_M; y_M)$ là trung điểm AB thì $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-1 + 5}{2} = 2 \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{3 + 1}{2} = 2 \end{cases}$

Vậy $M(2; 2) \Rightarrow \overrightarrow{CM} = (-1; 4)$ là vectơ chỉ phương của (AM)

Vậy CM: $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -2 + 4t \end{cases}$ ⇒ Đáp án đúng là b)

3. Ta có d: $\begin{cases} x = 5 + t & (1) \\ y = -9 - 2t & (2) \end{cases}$

Từ (1) ta có $t = x - 5$ thế vào (2) ta có

$y = -9 - 2(x - 5) \Leftrightarrow -2x - y + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2x + y - 1 = 0$ ⇒ Đáp án đúng là a)

4. Đường thẳng đi qua M(1; 0) và song song với đường thẳng (d): $4x + 2y + 1 = 0$ nhận $\vec{n}(2; 1)$ làm vectơ pháp tuyến. Vậy đường thẳng đó có phương trình:

$2(x - 1) + 1(y - 0) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 2 = 0$

⇒ Vậy đáp án đúng là c)

5. Đường thẳng d: $3x + 5y + 2006 = 0$ có hệ số góc $k = -\dfrac{3}{5}$.

Vậy đáp án sai là c)

6. Đường tròn tâm I(0; −2) và tiếp xúc với đường thẳng

Δ: $3x - 4y - 23 = 0$ có bán kính $R = \dfrac{|3.0 - 4(-2) - 23|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \dfrac{15}{5} = 3$

Vậy đáp án đúng là d).

7. $d_1 // d_2 \Leftrightarrow \dfrac{2}{m + 3} = \dfrac{1}{1} \neq \dfrac{-m}{-2m - 1}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (m + 3) = 2 \\ (2m + 1) \neq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$

Vậy đáp án đúng là b).

8. Gọi là góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 ta có:

$$\cos\varphi = \frac{|1.2 + 2.(-1)|}{\sqrt{5}.\sqrt{5}} = 0 \Rightarrow \varphi = 90^\circ$$

Vậy đáp án đúng là d) .

9. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 ta có:

$$\cos\varphi = \frac{|1.0 + 1.1|}{\sqrt{2}.\sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \varphi = 45^\circ$$

Vậy đáp án đúng là a)

10. Ta có $d(M, \Delta) = \dfrac{|0.\cos\alpha + 3\sin\alpha + 3(2 - \sin\alpha)|}{\sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}} = 6$

Vậy đáp án đúng là b).

11. Phương trình $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5^2$

Đây là phương trình đường tròn tâm $I(2; -3)$ và bán kính $R = 5$. Vậy đáp án đúng là d).

12. Viết lại phương trình (C): $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$ có tâm $I(-1; -2)$. Vậy đáp án sai là a).

13. Viết lại phương trình (C): $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 8$

Vậy phương trình tiếp tuyến của (C) tại M(3; 4) là:

$$(3 - 1)(x - 3) + (4 - 2)(y - 4) = 0 \Leftrightarrow x + y - 7 = 0.$$

Vậy đáp án đúng là a)

14. Viết lại phương trình (C): $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$. Vậy (C) có tâm $I(2; 1)$, bán kính $R = \sqrt{5}$, ta có $d(I, \Delta) = \dfrac{|2 + 2 + 1|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$. Vậy Δ tiếp xúc với (C) $\Rightarrow$ Đáp án đúng là c).

15. Viết lại phương trình (C): $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{2}$

Vậy (C) có tâm $I\left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$ và bán kính $R = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$;

$\Rightarrow$ Đáp án đúng là b)

16. Phương trình $x^2 + y^2 - (m + 2)x + 4my + 19m - 6 = 0$ là phương trình đường tròn khi và chỉ khi: $(m + 2)^2 + (2m)^2 - (19m - 6) > 0$.

$$\Leftrightarrow \quad 5m^2 - 15m + 10 > 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 5 \\ m < 1 \end{array}\right.$$

Suy ra đáp án đúng là c).

17. Δ: $4x + 3y + m = 0$ tiếp xúc với đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 1$ khi và chỉ

17. Δ: $4x + 3y + m = 0$ tiếp xúc với đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 1$ khi và chỉ khi $d(0, \Delta) = R$ (với $O(0; 0)$ và $R = 1$)

$$\Leftrightarrow \frac{|m|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |m| = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} m = 5 \\ m = -5 \end{array}\right.$$

Vậy đáp án đúng là b)

18. Đường tròn đường kính AB có tâm I(4; 3) là trung điểm AB và bán kính $R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(7-1)^2 + (5-1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{36-16}}{2} = \sqrt{13}$

Vậy đường tròn có phương trình:

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 13 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8x - 6y - 12 = 0.$$

Suy ra đáp án đúng là c)

19. Dễ thấy tọa độ A, B, C thỏa mãn phương trình $x^2 + y^2 - 4 = 0$.
Vậy đáp án đúng là d).

20. Đường tròn (C) có tâm I(4; 3) bán kính R = 2

Ta có $MI = \sqrt{(4-0)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17} > R = 2$.

Vậy M nằm ngoài (C) ⇒ đáp án đúng là a).

21. Từ phương trình đã cho ⇒ a = 5, b = 3, c = 4
⇒ 2b = 6. Vậy độ dài trục nhỏ bằng 6 ⇒ (IV) sai
⇒ Mệnh đề sai là d).

22. Gọi (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$

Do (E) có hai đỉnh (–3; 0) và (3; 0)
⇒ a = 3, tiêu điểm (–1; 0) và (1; 0) ⇒ c = 1.
Mặt khác $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow a^2 - c^2 = 9 - 1 = 8$.
Vậy (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ⇒ Đáp án đúng là c).

23. Viết lại phương trình (E): $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$

$\Rightarrow a = 1, b = \frac{1}{2}$ và $c^2 = a^2 - b^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{3}}{2}$

⇒ $2c = \sqrt{3}$ (tiêu cự bằng $\sqrt{3}$). Vậy đáp án đúng là d).

24. Tiêu điểm của (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(0 < b < a)$ là $F_1(-c; 0)$ $F_2(0; c)$. Đường thẳng Δ qua F_1 và vuông góc với trục lớn có phương trình $x = -c$.

Thay x = –c vào phương trình (E) ta có $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

Vậy Δ cắt (E) tại hai điểm phân biệt là $M\left(-c; -\frac{b^2}{a}\right)$ và $N\left(-c; \frac{b^2}{a}\right)$

$\Rightarrow MN = 2.\frac{b^2}{a} \Rightarrow$ Đáp án đúng là b).

25. Ta có $2a = 26 \Rightarrow a = 13$, $\frac{c}{a} = \frac{12}{13} \Rightarrow c = 12$

mà $b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow b^2 = (13)^2 - (12)^2 = 169 - 144 = 25$

$\Rightarrow b = 5 \Rightarrow$ Đáp án đúng là a)

26. Viết lại (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

Từ phương trình suy ra $a = 3$, $b = 2 \Rightarrow c = \sqrt{5}$

Từ đó ta có $2a = 6$, $2b = 4$, $2c = 2\sqrt{5}$ và $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

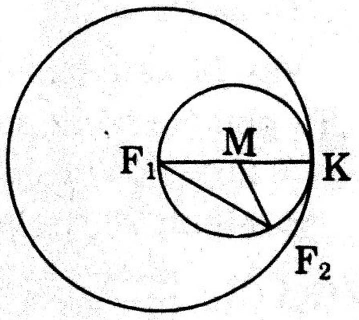
Vậy đáp án câu sai là c)

27. Ta có:

$MF_1 + MF_2 = KF_1 - MF_1 + MF_2 = KF_1 = 2a$

Vậy tập hợp điểm M là tâm của đường tròn (C') là một elip có hai tiêu điểm F_1, F_2 độ dài trục lớn 2a.

Suy ra đáp án đúng là c)



28. Gọi M(x; y) là đỉnh trong mặt phẳng sao cho $MF = \frac{4}{5}MH$. Ta có:

$$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = \frac{4}{5}\left|x - \frac{25}{4}\right| \Leftrightarrow 25\left[(x-4)^2 + y^2\right] = 16\left(x - \frac{25}{4}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 9x^2 + 25y^2 = 25.9 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Vậy chọn a).

29. Elip (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ có hai tiêu điểm $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$

Ta tính được $MF_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$, $MF_2 = \sqrt{b^2 + c^2}$, $OM^2 = b^2$

Nên suy ra $MF_1.MF_2 + OM^2 = \sqrt{b^2 + c^2}.\sqrt{b^2 + c^2} + b^2$

$= b^2 + c^2 + b^2 = 2b^2 + c^2 = 2b^2 + (a^2 - b^2) = a^2 + b^2$

Vậy đáp án đúng là a)

Suy ra $d(F_1, \Delta) = \dfrac{|0 + 3|}{\sqrt{1}} = 3$; $d(F_2, \Delta) = \dfrac{|0 + 3|}{\sqrt{1}} = 3$

⇒ Tích khoảng cách giữa hai tiêu điểm của (E) đến Δ là 9.

Vậy đáp án đúng là b).

III. BÀI TẬP TỔNG HỢP VÀ NÂNG CAO

Bài 11. Trong mặt phẳng với Oxy cho hình vuông với một đỉnh A(0; 5) và một đường chéo nằm trên đường thẳng $\Delta: -2x + y = 0$. Tìm tọa độ tâm của hình vuông.

Bài 12. Cho hình vuông có hai đỉnh liên tiếp là: A(2; 0) và B(−1; 4). Hãy tìm phương trình các cạnh của hình vuông.

Bài 13. Cho elip (E): $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$. Gọi A_1, A_2 là hai đỉnh trên trục lớn và M là một điểm di động trên (E). Tìm tập hợp tọa độ trực tâm H của ΔMA_1A_2.

Bài 14. Cho ΔABC có cạnh BC = 10 bán kính đường tròn nội tiếp r = 3 cạnh AB: $x - 2 = 0$, cạnh AC: $x - \sqrt{3}y - 12 = 0$. Tính chu vi ΔABC.

Bài 15. Tìm tâm và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác tạo bởi hai trục tọa độ và đường thẳng (d): $3x + 4y - 12 = 0$.

Bài 16*. Cho (C_m): $2x^2 + 2y^2 - 4(m - 1)x + 12(m + 2)y + 10m^2 + 68m - 3 = 0$.

a) Chứng minh rằng khi m thay đổi (C_m) luôn luôn là đường tròn.

b) Tìm tập hợp các tâm I của (C_m)

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 11. Tọa độ tâm I của hình vuông là I(2; 4)

Bài 12. Đáp số: AB: $4x + 3y - 8 = 0$ CD: $4x + 3y + 17 = 0$

AD: $3x - 4y - 6 = 0$ BC: $3x - 4y + 19 = 0$

(lưu ý có hai hình vuông thỏa mãn bài toán)

Bài 13. Tập hợp trực tâm của ΔMA_1A_2 là elip có phương trình: $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{\frac{81}{4}} = 1$

Bài 14. Hướng dẫn: Ta có: $\cos A = \dfrac{|1|}{\sqrt{1}.\sqrt{1+3}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow A = 60^\circ$

$$\Rightarrow \quad \frac{A}{2} = 30^0 \Rightarrow \tan\frac{A}{2} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Mặt khác ta có $r = (p - a)\tan\dfrac{A}{2}$ nên $3 = (p - 10)\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow \quad 2p = 2(10 + 3\sqrt{3})$$

Đáp số: Chu vi ΔABC là $2(10 + 3\sqrt{3})$

Bài 15. (d) cắt Ox lần lượt tại A(4; 0) và B(0; 3)

Ta có: OA = 4, OB = 3 ⇒ AB = 5

Bài 15. (d) cắt Ox lần lượt tại $A(4;\ 0)$ và $B(0;\ 3)$

Ta có: $OA = 4,\ OB = 3 \Rightarrow AB = 5$

Phương trình đường phân giác trong OE của $\widehat{AOB}$ là (Δ):

$y = x \Leftrightarrow x - y = 0$

Vẽ phân giác trong BD của góc $\widehat{OBA}$, nên:

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{DA}} = \frac{OD}{DA} = \frac{BO}{BA} = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{OD}}{3} = \frac{\overline{DA}}{5} = \frac{\overline{OD} + \overline{DA}}{3+5} = \frac{\overline{OA}}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \overline{OD} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad D\left(\frac{3}{2};\ 0\right)$$

Đường phân giác BD qua 2 điểm $B(0;\ 3)$ và $D\left(\frac{3}{2};\ 0\right)$, nên có phương trình là: $BD: \dfrac{x}{\frac{3}{2}} + \dfrac{y}{3} = 1 \Leftrightarrow BD: 2x + y - 3 = 0$

Tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác OAB là giao điểm của OE và BD, nên ta có toạ độ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy tâm $I(1;\ 1)$ và bán kính là: $R = d(I;\ OA) = |y_I| = 1$

Bài 16*.

a) Ta có (C_m): $x^2 + y^2 - 2(m-1)x + 6(m+2)y + 5m^2 + 34m - \dfrac{3}{2} = 0$

Do đó: $a = m - 1,\ b = -3(m+2),\ c = 5m^2 + 34m - \dfrac{3}{2}$

Ta có: $a^2 + b^2 - c = (m-1)^2 + 9(m+2)^2 - \left(5m^2 + 34m - \dfrac{3}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 - c = 5m^2 + 37 + \dfrac{3}{2} > 0\ \forall m.$

Vậy (C_m) luôn luôn là đường tròn khi m thay đổi.

b) Tâm I $\begin{cases} x = m - 1 = 0 & (1) \\ y = -3(m+2) & (2) \end{cases}$

Từ (1), ta có $x = m - 1 \Leftrightarrow m = x + 1$

Thay $m = x + 1$ vào (2):

$y = -3(m+2) = -3(x+1+2) \quad \Leftrightarrow y = -3x - 9.$

Vậy tập hợp các tâm I của (C_m) là đường thẳng $y = -3x - 9$.

ÔN TẬP CUỐI NĂM

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Chương I. Vectơ

1. Định nghĩa Vectơ
2. Tổng và hiệu của hai vectơ
   - Quy tắc ba điểm (Đối với phép cộng)

     Với ba điểm tuỳ ý M, N, P ta luôn có $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$
   - Quy tắc hình bình hành

     Nếu ABCD là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$
   - Quy tắc ba điểm (đối với phép trừ)

     Với ba điểm O, A, B tuỳ ý ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$
3. Phép nhân một số với một vectơ
   - Ba điểm A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \exists k \in R, \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AK}$
4. Hệ trục tọa độ
   - Cho hai điểm A và B trên trục $\left(O; \vec{e}\right)$. Khi đó có duy nhất số a sao cho $\overrightarrow{AB} = a.\vec{e}$. Ta gọi số a là độ dài đại số của vectơ $\overrightarrow{AB}$ kí hiệu $a = \overline{AB}$

Chương II. Tích vô hướng của hai vectơ

1. Giá trị lượng giác của một góc α bất kì với $0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$
2. Tích vộ hướng của hai vectơ $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = 0$
3. Các hệ thức lượng trong tam giác và giải tam giác

Chương III. Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng

1. Phương trình đường thẳng
2. Phương trình đường tròn
3. Phương trình Elip

Bài 1. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$ và $\left(\vec{a}.\vec{b}\right) = 120^\circ$. Với giá trị nào của m thì hai vectơ $\vec{a} + m\vec{b}$ và $\vec{a} - m\vec{b}$ vuông góc với nhau?

Giải

Hai vectơ $\vec{a} + m\vec{b}$ và $\vec{a} - m\vec{b}$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi:

$$\left(\vec{a} + m\vec{b}\right).\left(\vec{a} - m\vec{b}\right) = 0 \Leftrightarrow \vec{a}^2 - \vec{a}\left(m\vec{b}\right) + m\vec{b}.\vec{a} - m^2\vec{b}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|\vec{a}^2\right| - m\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos(\vec{a},\vec{b}) + m\left|\vec{b}\right|\left|\vec{a}\right|\cos(\vec{a},\vec{b}) - m^2\left|\vec{b}\right| = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 9 + m\cdot\frac{15}{2} - m\cdot\frac{15}{2} - 15m^2 = 0 \Leftrightarrow 9 - 15m^2 = 0 \Leftrightarrow m^2 = \frac{9}{15}$$

$$\Leftrightarrow m = \pm\frac{3}{\sqrt{15}}$$

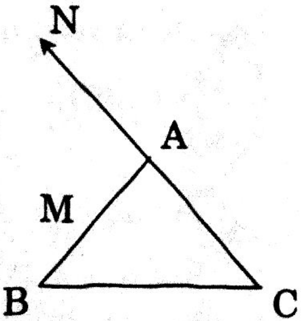
Bài 2. Cho ΔABC

a) Dựng điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. Dựng điểm N sao cho

$$\overrightarrow{AN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$

b) Nếu $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \beta\overrightarrow{AC}$ tìm mối liên hệ giữa α và β để MN // BC

Giải



a) Dựng điểm M sao cho $AM = \frac{2}{3}AB$ là hai vectơ $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng.

Dựng điểm N sao cho $AN = \frac{2}{3}AC$ và $\overrightarrow{AN}$ ngược hướng với $\overrightarrow{AC}$

b) Dễ thấy với α = 1, β = 1 không thoả mãn vì MN ≡ BC

Như vậy MN // BC khi và chỉ khi:

$$\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{BC} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC} - k\overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow \beta\overrightarrow{AC} - \alpha\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} - k\overrightarrow{AB} \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha + k)\overrightarrow{AB} + (k - \beta)\overrightarrow{AC} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha - k = 0 \\ k - \beta = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta$$

Vậy với $\begin{cases} \alpha = \beta \\ \alpha, \beta \neq 0 \end{cases}$ thì MN // BC

Bài 3. Cho ΔABC là tam giác đều cạnh a, M là một điểm trên đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

a) Tính $MA^2 + MB^2 + MC^2$ theo a.

b) Cho đường thẳng d, tìm điểm M trên đường thẳng d sao cho:

$MA^2 + MB^2 + MC^2$ nhỏ nhất.

Giải

Do ΔABC đều nên trọng tâm G của ΔABC trùng với tâm O của đường tròn ngoại tiếp ΔABC, ngoài ra theo định lý ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{a}{2\sin 60^\circ} = \frac{a}{2.\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

a) Ta có

$$\overrightarrow{MA}^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 = \overrightarrow{MO}^2 + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA}^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{3} + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA}$$

$$= \frac{2a^2}{3} + 2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OA} \qquad (1)$$

Tương tự ta có: $\overrightarrow{MB}^2 = \frac{2a^2}{3} + 2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OB}$ (2)

$$\overrightarrow{MC}^2 = \frac{2a^2}{3} + 2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OC} \qquad (3)$$

Cộng từng vế (1), (2), (3) ta có:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2 + 2\overrightarrow{OM}.(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

$$= 2a^2 \text{ (do } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}\text{)}$$

b) Với mọi điểm M nằm trên d cho trước ta có:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3OM^2 + (OA^2 + OB^2 + OC^2)$$

Vậy $MA^2 + MB^2 + MC^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ OM nhỏ nhất $\Rightarrow$ M là hình chiếu vuông góc của O trên d (hay nói cách khác ta hạ OM $\perp$ d thì M là điểm cần tìm) (lưu ý khi d qua O thì O $\equiv$ M)

Bài 4. Cho ΔABC đều cạnh 6(cm). Một điểm M nằm trên cạnh BC sao cho BM = 2(cm)

a) Tính độ dài của đoạn thẳng AM và tính cosin của góc $\widehat{BAM}$

b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC

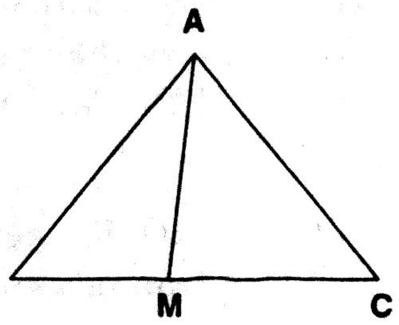
c) Tính độ dài đường trung tuyến vẽ từ đỉnh C của ΔACM

d) Tính diện tích ΔABM

Giải

Áp dụng định lý sin trong ΔABC ta có: $\frac{AB}{\sin C} = 2R$

$$\Rightarrow R = \frac{6}{2.\sin 60^0} = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$



a) Áp dụng định lý cosin trong Δ ABM ta có

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB.BM\cos B$$

$$36 + 4 - 24\cos 60^\circ = 28 \Rightarrow AM = 2\sqrt{7}$$

$$\cos\widehat{BAM} = \frac{AB^2 + AM^2 - BM^2}{2AB.AM} = \frac{36 + 28 - 4}{2.6.2\sqrt{7}} = \frac{60}{24\sqrt{7}} = \frac{5}{2\sqrt{7}}$$

b) Gọi R_1 là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABM$, theo định lý sin ta có:

$$\frac{AM}{\sin B} = 2R_1 \Rightarrow R_1 = \frac{AM}{2\sin B} = \frac{2\sqrt{7}}{2.\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$$

c) Gọi m_c là độ dài trung tuyến vẽ từ C của $\triangle ACM$ ta có:

$$m_C^2 = \frac{AC^2 + MC^2}{2} - \frac{AM^2}{4} = \frac{36 + 16}{2} - \frac{28}{4} = 26 - 7 = 19$$

$$\Rightarrow \quad m_c = \sqrt{19} \text{ (cm)}$$

d) $dt(\Delta ABM) = \frac{1}{2}BA.BM\sin B = \frac{1}{2}.6.2.\sin 60^\circ = 6.\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ (cm^2)

Bài 5. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta đều có:

$a = b\cos C + c\cos B$

$\sin A = \sin B\cos C + \sin C\cos B$

$h_a = 2R\sin B\sin C$

Giải

a) Áp dụng định lý cosin ta có:

$$b\cos C + c\cos B = b.\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + c.\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ab}$$

$$= \frac{a^2 + b^2 - c^2 + a^2 + c^2 - b^2}{2a} = \frac{2a^2}{2a} = a \quad \text{(đpcm)}$$

b) Theo a) ta có: $a = b\cos C + c\cos B$ (1)

Áp dụng định lý sin ta có: $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$

thay vào (1) ta có: $2R\sin A = 2\sin B\cos C + 2R\sin C\cos B$

$\Leftrightarrow \quad \sin A = \sin B\cos C + \sin C\cos B$ (đpcm)

c) Theo công thức tính diện tích ta có: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.ah_a$

Mặt khác: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}bc.\frac{a}{2R}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow h_a = \frac{bc}{2R} = 2R\sin B\sin C$ (đpcm)

Bài 6. Cho các điểm A(2; 3), B(9; 4), M(5; y) và P(x; 2)

a) Tìm y để ΔAMB vuông tại M

b) Tìm x để ba điểm A, P, B thẳng hàng

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{AM} = (3; y - 3)$, $\overrightarrow{MB} = (4; 4 - y)$, ΔABM vuông tại M khi và chỉ khi $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow 3.4 + (y - 3)(4 - y) = 0$

$$\Leftrightarrow 12 + 4y - y^2 - 12 + 3y = 0 \Leftrightarrow y^2 - 7y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 7 \\ y = 0 \end{array}\right.$$

Lưu ý hai vectơ $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MB} \neq \vec{0}$ $\forall y$

b) Ta có: $\overrightarrow{AB}(7; 1)$, $\overrightarrow{AP}(x - 2; -1)$

Ba điểm A, B, P thẳng hàng khi và chỉ khi $\exists k$ sao cho $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AP}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7 = k(x - 2) \\ 1 = k(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 = -x + 2 \\ k = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ k = -1 \end{cases}$$

Vậy x = –5 thì 3 điểm A, P, B thẳng hàng.

Bài 7. Cho ΔABC, biết phương trình của đường thẳng AB: $4x + y - 12 = 0$. Đường cao BH: $5x - 4y - 15 = 0$, đường cao AH: $2x + 2y - 9 = 0$, với H là giao điểm ba đường cao. Hãy viết phương trình hai đường thẳng chứa hai cạnh còn lại và đường cao thứ ba.

Giải

Do $A = AH \cap AB \Rightarrow$ toạ độ A là nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + y - 12 = 0 \\ 2x + 2y - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = 2 \end{cases}. \text{ Vậy } A\left(\frac{5}{2}; 2\right)$$

Tương tự B(3; 0)

+ Đường thẳng (BC) qua B(3; 0) và vuông góc với AH nên (BC) nhận $\vec{n}_{AH}(1; 1)$ làm vtpt $\Rightarrow$ (BC): $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 0 + t \end{cases}$

+ Đường thẳng (AC) qua $A\left(\frac{5}{2}; 2\right)$ và vuông góc với BH nên (AC) nhận

$\vec{n}_{BH}(5; -4)$ làm vtpt. Vậy (AC): $\begin{cases} x = \dfrac{5}{2} + 5m \\ y = 2 - 4m \end{cases}$

+ Lập phương trình (CH): Toạ độ C là nghiệm hệ:

$$\begin{cases} x = 3 + t, y = t \\ y = 2 - 4m, y = \dfrac{5}{2} + 5m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 + t = \dfrac{5}{2} + 5m \\ t = 2 - 4m \\ x = 3 + t, y = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{4}{3} \\ x = 3 + \dfrac{4}{3} = \dfrac{13}{3} \\ y = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Vậy $C\left(\dfrac{13}{3}; \dfrac{4}{3}\right)$

Đường cao (CH) qua C nhận $\vec{u}_{AB} = (4; 1)$ làm vtpt.

Vậy (CH): $\begin{cases} x = \dfrac{13}{3} + 4n \\ y = \dfrac{4}{3} + n \end{cases}$

Bài 8. Lập phương trình đường tròn có tâm nằm trên đường thẳn
Δ: $4x + 3y - 2 = 0$ và tiếp xúc với hai đường thẳng:
Δ_1: $x + y + 4 = 0$ và Δ_2: $7x - y + 4 = 0$

Giải

Gọi $I(x_0; y_0)$ là tâm của (ℰ) cần lập

Do $I \in (\Delta)$ ta có: $4x_0 + 3y_0 - 2 = 0$ (1)

Mặt khác (ℰ) tiếp xúc với 2 đường thẳng Δ_1 và Δ_2 nên ta có

$$d(I, \Delta_1) = d(I, \Delta_2) \Leftrightarrow \frac{|x_0 + y_0 + 4|}{\sqrt{2}} = \frac{|7x_0 - y_0 + 4|}{\sqrt{50}}$$

$$\Leftrightarrow 5|x_0 + y_0 + 4| = |7x_0 - y_0 + 4|$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x_0 + 5y_0 + 20 = 7x_0 - y_0 + 4 \\ 5x_0 + 5y_0 + 20 = -7x_0 + y_0 - 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x_0 - 6y_0 - 16 = 0 \\ -12x_0 - 4y_0 - 24 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x_0 - 3y_0 - 8 = 0 & (2) \\ 3x_0 + y_0 + 6 = 0 & (3) \end{array}\right.$$

Từ (1), (2), (3) ta có hai hệ:

$$\text{(I)} \begin{cases} 4x_0 + 3y_0 - 2 = 0 \\ x_0 - 3y_0 - 8 = 0 \end{cases} \text{ và } \text{(II)} \begin{cases} 4x_0 + 3y_0 - 2 = 0 \\ 3x_0 + y_0 + 6 = 0 \end{cases}$$

* Giải (I) ta được $\begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = -2 \end{cases}$.

Vậy I(−4; 6) và bán kính $R = d(I; \Delta_1) = 3\sqrt{2}$

Vậy ($\mathcal{E}$): $(x + 4)^2 + (y - 6)^2 = 18$

* Giải (II) (tương tự như trên)

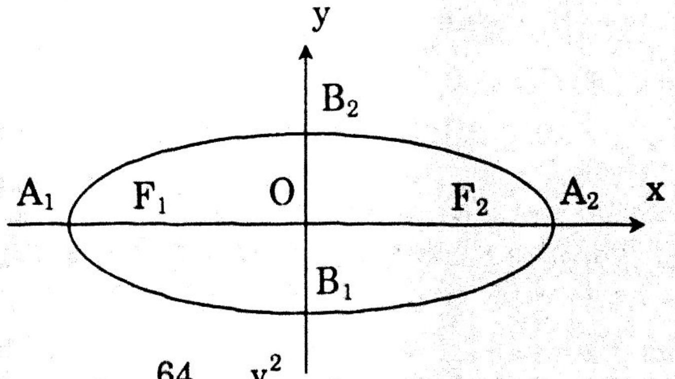
Bài 9. Cho elip (E): $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$. Hãy xác định toạ độ các tiêu điểm, các đỉnh và vẽ elip (E). Qua tiêu điểm của elip dựng đường thẳng song song với Oy và cắt elip tại hai điểm M và N. Tính độ dài đoạn MN.

Giải

Ta có: $a^2 = 100 \Rightarrow a = 10, b^2 = 36 \Rightarrow b = 6$

$\Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow c = 8.$

Vậy (E) có hai tiêu điểm $F_1(-8;\ 1)$, $F_2(8;\ 0)$. Bốn đỉnh của (E) là: $A_1(-10; 0)$, $A_2(10; 0)$, $B_1(0; -6)$, $B_2(0; 6)$.



+ Xét điểm $F_1(-8; 0)$ đường thẳng qua F_1 và song song với Oy có phương trình x = −8

Thay vào phương trình (E) ta có: $\frac{64}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$

$$\Rightarrow y^2 = \left(1 - \frac{64}{100}\right)36 = \left(\frac{36}{10}\right)^2 \Rightarrow y = \pm\frac{18}{5}.$$

Vậy đường thẳng x = −8 cắt (E) tại hai điểm

$M\left(-8; \frac{18}{5}\right)$ và $N\left(-8; -\frac{18}{5}\right)$

$$\Rightarrow MN = \sqrt{\left(\frac{18}{5} + \frac{18}{5}\right)^2} = 2.\frac{18}{5} = \frac{36}{5}$$

+ Tương tự đường thẳng song song với Oy và qua F_2 cắt (E) tại M', N' và $M'N' = \frac{36}{5}$

II. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Bài 10. Cho trước hai điểm A, B cố định và hai số m, n với $m + n \leq 0$

a) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm I thỏa mãn:

$m\overrightarrow{IA} + n\overrightarrow{IB} = \vec{0}$

b) Suy ra với M là điểm bất kỳ ta có $m\overrightarrow{MA} + n\overrightarrow{MB} = (m+n)\overrightarrow{MI}$

Bài 11. Cho ΔABC lấy các điểm M, N, P sao cho $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$

$\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$.

Tính $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MN}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. Suy ra M, N, P thẳng hàng.

Bài 12. Cho ΔABC có AB = 5, AC = 6, BC = 7. Gọi trung điểm AC là M

Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABM.

Bài 13. CMR: ΔABC đều nếu: $\begin{cases} b(b^2 - a^2) = c(a^2 - c^2) \\ \cos A + \cos B = 1 \end{cases}$

Bài 14. Tìm giao điểm của Δ: $\begin{cases} x = 2t \\ y = -1 + t \end{cases}$ với elip (E): $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$

Bài 15. Cho A(–1; 1), B(1; 3), C(2; 5). Tìm tập hợp điểm M thoả mã

$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 40$

Bài 16. Cho (ε_m): $x^2 + y^2 + 2mx - 6y + 4 - m = 0$

a) Chứng minh rằng (ε_m) là đường tròn ∀m

b) Tìm quỹ tích tâm của (ε_m) khi m thay đổi.

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 10. a) $m\overrightarrow{IA} + n\overrightarrow{IB} = 0 \Leftrightarrow m\overrightarrow{IA} + n(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (m+n)\overrightarrow{IA} + n\overrightarrow{AB} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AI} = \dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{AB}$ (do $m + n \neq 0$)

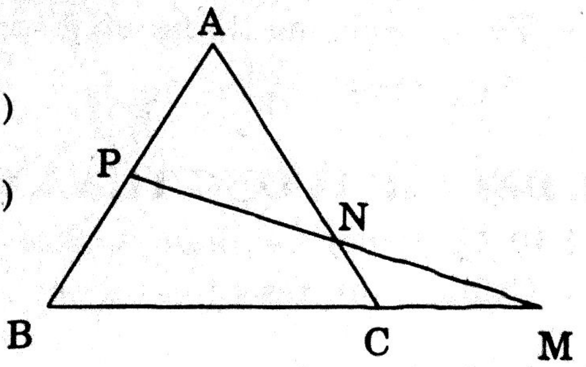
Do A, B cố định nên vectơ $\dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{AB}$ không đổi.

Vậy tồn tại một điểm I duy nhất thoả $m\overrightarrow{IA} + n\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

b) Ta có: $m\overrightarrow{MA} + n\overrightarrow{MB} = m(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + n(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) =$

$= (m+n)\overrightarrow{MI} + m\overrightarrow{IA} + n\overrightarrow{IB} = (m+n)\overrightarrow{IA}$ (đpcm)

Bài 11.



Ta có: $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM}$ (1)

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}$ (2)

Mặt khác: $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \qquad (3)$

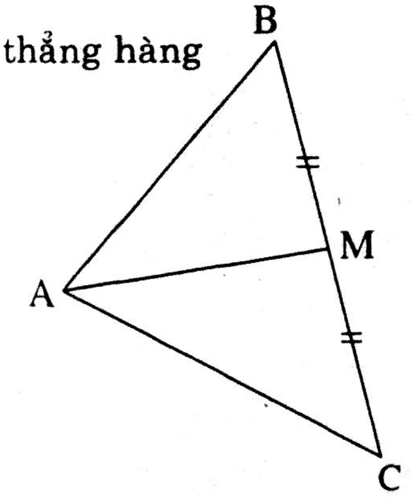
$\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \qquad (4)$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \qquad (5)$

Thay (3), (4), (5) vào (1), (2) ta có:

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \quad (6) \quad$ và $\quad \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \quad (7)$

Từ (6) và (7) ta có $\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{MN} \Rightarrow$ M, N, P thẳng hàng



Bài 12. Theo định lý trung tuyến, ta có:

$$AB^2 + BC^2 = 2BM^2 + \frac{AC^2}{2}$$

$$\Rightarrow BM^2 = \frac{1}{2}\left(AB^2 + BC^2 - \frac{AC^2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(25 + 49 - 18) = 28$$

$$\Rightarrow BM = 2\sqrt{7}$$

Áp dụng định lý hàm số cosin trong $\triangle ABM$

Ta có: $\cos A = \dfrac{AB^2 + AM^2 - BM^2}{2.AB.AM} = \dfrac{25 + 9 - 28}{2.5.3} = \dfrac{1}{5}$

$$\Rightarrow \quad \sin A = \sqrt{1 - \frac{1}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

Áp dụng định lý hàm số sin trong $\triangle ABM$ ta có:

$$R = \frac{BM}{2.\sin A} = \frac{2\sqrt{7}}{2.\frac{2\sqrt{6}}{5}} = \frac{5\sqrt{42}}{12}$$

(R là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABM$)

Bài 13. Ta có: $b(b^2 - a^2) = c(a^2 - c^2) \quad \Leftrightarrow \quad b^3 - ba^2 = ca^2 - c^3$

$\Leftrightarrow \quad b^3 + c^3 = a^2(b + c) \quad \Leftrightarrow \quad b^2 - bc + c^2 = a^2$

(chia cả hai vế cho $b + c > 0$)

$\Leftrightarrow \quad b^2 - bc + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$ (định lý cosin)

$\Leftrightarrow \quad -2bc.\cos A = -bc \quad \Leftrightarrow \quad \cos A = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad A = 60^\circ$

Thay $\cos A = \frac{1}{2}$ vào $\cos A + \cos B = 1 \Rightarrow \cos B = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow B = 60^\circ$

$\Rightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

Bài 14.

Thay $\begin{cases} x = 2t \\ y = -1 + t \end{cases}$ vào phương trình $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$

Ta có: $\frac{4t^2}{4} + (-1 + t)^2 = 1 \Leftrightarrow t^2 + 1 - 2t + t^2 = 1$

$\Leftrightarrow 2t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 1 \end{array}\right.$

Khi $t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$. Nên giao điểm là A (0; –1)

Khi $t = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$. Nên giao điểm là B (2; 0)

Bài 15.

Gọi M (x; y) khi đó ta có:

$MA^2 = (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2$

$MB^2 = (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10$

$MC^2 = (x - 2)^2 + (y - 5)^2 = x^2 + y^2 - 4x - 10y + 29$

Vậy $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 40 \Leftrightarrow 3(x^2 + y^2) - 4x - 18y + 41 = 40$

$\Leftrightarrow 3(x^2 + y^2) - 4x - 18y + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{4}{3}x - 6y + \frac{1}{3} = 0$

$\Leftrightarrow \left(x^2 - 2.\frac{4}{6}x + \frac{16}{9}\right) + \left(y^2 - 6y + 9\right) = \frac{94}{9}$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + (y - 3)^2 = \frac{94}{9}$ (1)

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn có phương trình (1)

Bài 16. a) Ta có: $m^2 + 9 - (4 - m) = m^2 + m + 5 = \left(m^2 + m + \frac{1}{4}\right) + \frac{19}{4}$

$= \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{19}{4} > 0 \quad \forall m.$

Vậy (ε_m) là phương trình đường tròn $\forall m$

b) Gọi tâm (ε_m) là $I(x_0; y_0)$ ta có $\begin{cases} x_0 = -m \\ y_0 = 3 \end{cases}$

Vậy quỹ tích tâm I của (ε_m) là đường thẳng $y = 3$.

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU 3

CHƯƠNG I: VECTƠ 5

§1. Các định nghĩa 5

§2. Tổng và hiệu của hai vectơ 9

§3. Phép nhân một số với một vectơ 15

§4. Hệ trục tọa độ 27

Ôn tập chương I 34

Câu hỏi trắc nghiệm 43

CHƯƠNG II: TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ VÀ ỨNG DỤNG 56

§1. Giá trị lượng giác của một góc α bất kì với 0° ≤ α ≤ 180° 56

§2. Tích vô hướng của hai vectơ 60

§3. Các hệ thức lượng trong tam giác và giải tam giác 67

Ôn tập chương II 74

Câu hỏi trắc nghiệm 79

CHƯƠNG III: PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG 91

§1. Phương trình đường thẳng 91

§2. Phương trình đường tròn 98

§3. Phương trình đường elip 103

Ôn tập chương III 108

Ôn tập cuối năm 125

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 39714896; (04) 39724770; Fax: (04) 39714899

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc : PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập : PHẠM THỊ TRÂM
Biên tập : LAN HƯƠNG
Trình bày bìa : XUÂN VIỆT

Đối tác liên kết xuất bản:
CÔNG TY SÁCH – TBGD ĐỨC TRÍ

SÁCH LIÊN KẾT

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP HÌNH HỌC 10

Mã số: 1L-116 ĐH2009
In 3.000 cuốn, khổ 16 x 24cm. Tại Công ty TNHH In Bao bì Hưng Phú
Số xuất bản: 245-2009/CXB/43-54/ĐHQGHN, ngày 24/04/2009.
Quyết định xuất bản số: 116 LK–TN/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2009.